

# Στοιχεία Φυσικής Α' & Β' Λυκείου



Νίκος Αναστασάκης

Γενικό Λύκειο Βάμου, & ΕΚΦΕ Χανίων

Συγγραφέας: Νίκος Αναστασάκης (Φυσικός, Δ/θμια Εκπ/ση)

Τίτλος: «Στοιχεία Φυσικής Α' & Β' Λυκείου».

ISBN: 978-618-00-3316-8

Χανιά, Ιούνιος 2021

Ιστοσελίδα: <https://ekfechanion.eu>

e-mail: [nikos.anastasakis@sch.gr](mailto:nikos.anastasakis@sch.gr)



Αυτή η εργασία χορηγείται με άδεια [Creative Commons](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) : Αναφορά Δημιουργού - Μη Εμπορική Χρήση - Παρόμοια Διανομή 4.0 Διεθνές

*Αναφορά Δημιουργού — Θα πρέπει να καταχωρίσετε αναφορά στο δημιουργό , με σύνδεσμο της άδειας, και με αναφορά αν έχουν γίνει αλλαγές . Μπορείτε να το κάνετε αυτό με οποιονδήποτε εύλογο τρόπο, αλλά όχι με τρόπο που να υπονοεί ότι ο δημιουργός αποδέχεται το έργο σας ή τη χρήση που εσείς κάνετε.*

*Μη Εμπορική Χρήση — Δε μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το υλικό για εμπορικούς σκοπούς.*

*Παρόμοια Διανομή — Αν αναμείξετε, τροποποιήσετε, ή δημιουργήσετε πάνω στο υλικό, πρέπει να διανείμετε τις δικές σας συνεισφορές υπό την ίδια άδεια όπως και το πρωτότυπο.*

## Περιεχόμενα

|                                                                                                                |         |       |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|-------|
| Μεγέθη Κίνησης:                                                                                                | Σελίδες | 1-4   |
| <a href="#"><u>Μετατόπιση</u></a> , <a href="#"><u>Ταχύτητα</u></a> , <a href="#"><u>Μέση Ταχύτητα</u></a>     |         |       |
| Ευθύγραμμες Κινήσεις:                                                                                          | Σελίδες | 5-20  |
| <a href="#"><u>Ευθύγραμμη Ομαλή</u></a>                                                                        |         | 5     |
| <a href="#"><u>Ευθ. Ομαλά Μεταβαλλόμενη</u></a>                                                                |         | 11    |
| Δυνάμεις :                                                                                                     | Σελίδες | 21-43 |
| <a href="#"><u>Βάρος</u></a>                                                                                   |         | 22    |
| <a href="#"><u>Δύναμη Ελατηρίου</u></a>                                                                        |         | 23    |
| <a href="#"><u>Νόμοι των Δυνάμεων</u></a>                                                                      |         | 25    |
| <a href="#"><u>Σύνθεση &amp; Ανάλυση Δυνάμεων</u></a>                                                          |         | 33    |
| <a href="#"><u>Τριβή</u></a>                                                                                   |         | 37    |
| Κινήσεις με την επίδραση του βάρους                                                                            | Σελίδες | 43-47 |
| <a href="#"><u>Κατακόρυφες Κινήσεις</u></a>                                                                    |         | 44    |
| <a href="#"><u>Οριζόντια Βολή</u></a>                                                                          |         | 45    |
| Κυκλική Κίνηση                                                                                                 | Σελίδες | 48-56 |
| <a href="#"><u>Μεγέθη</u></a> , <a href="#"><u>Εξισώσεις</u></a>                                               |         |       |
| Ορμή                                                                                                           | Σελίδες | 57-67 |
| <a href="#"><u>2<sup>ος</sup> Νόμος του Νεύτωνα</u></a>                                                        |         | 57    |
| <a href="#"><u>Η Αρχή Διατήρησης της Ορμής</u></a>                                                             |         | 61    |
| Ενέργεια – Έργο:                                                                                               | Σελίδες | 61-89 |
| <a href="#"><u>Κινητική Ενέργεια</u></a>                                                                       |         | 69    |
| <a href="#"><u>Δυναμική Ενέργεια</u></a> ( <a href="#"><u>Βαρυτική</u></a> – <a href="#"><u>Ελαστική</u></a> ) |         | 70    |
| <a href="#"><u>Έργο Δύναμης</u></a>                                                                            |         | 73    |
| <a href="#"><u>Το Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας</u></a>                                            |         | 75    |
| <a href="#"><u>Η Μεταβολή της Δυναμικής Ενέργειας</u></a>                                                      |         | 78    |
| <a href="#"><u>Μηχανική Ενέργεια</u></a>                                                                       |         | 80    |
| <a href="#"><u>Ισχύς</u></a>                                                                                   |         | 81    |

## Πρόλογος

Στις σελίδες που ακολουθούν περιλαμβάνεται μία προσέγγιση της Φυσικής της Α' Λυκείου, σύμφωνα με την διδακτέα ύλη των σχ. ετών 2008-2010. Σε αντιστοιχία με το ισχύον Α.Π.Σ. οι περιεχόμενες ενότητες αναφέρονται σε ύλη της Α' και Β' Λυκείου.

Σκοπός του συγγράμματος είναι να αποτελέσει βοήθημα για τους/τις μαθητές/τριες των δύο τάξεων του Λυκείου, που θα τους εισάγει σε βασικά σημεία της θεωρίας, θα τους δώσει λαβές και παραδείγματα για να αντιληφθούν τις μεθόδους επίλυσης απλών προβλημάτων και θα αναδείξει την χρησιμότητα της απεικονίσεων μέσω διαγραμμάτων, σχημάτων κλπ.

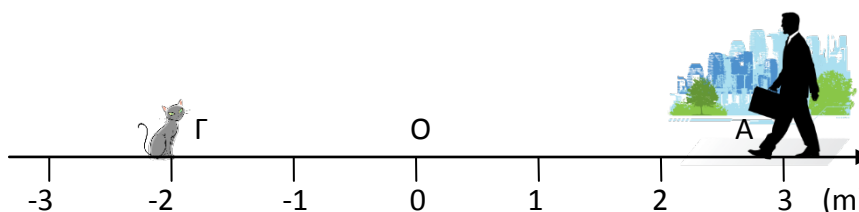
Δεν επιδιώκεται η εμβάθυνση στα γνωστικά αντικείμενα, καθώς αυτό απαιτεί εργαστηριακές δραστηριότητες και μεγαλύτερη ποικιλία προβλημάτων διαβαθμισμένης δυσκολίας. Έτσι οι ενότητες που ακολουθούν λειτουργούν περισσότερο ως σημειώσεις και οδηγός μελέτης, παράλληλα με τα σχολικά και άλλα βοηθητικά εγχειρίδια.

Έχει γίνει προσπάθεια στα κείμενα να χρησιμοποιηθεί απλή, «προφορική» γλώσσα (όπως στην τάξη) και η περιγραφή των εννοιών να είναι συνδεδεμένη με καθημερινά φαινόμενα και εμπειρίες των παιδιών. Η συνολική παρουσίαση εστιάζει σε σημεία που αναδείχτηκαν κατά την διδασκαλία Φυσικής σε σχολικές τάξεις του Λυκείου και στο ΕΚΦΕ Χανίων, στη διάρκεια μίας 20ετούς διαδρομής.

Νίκος Αναστασάκης

Χανιά, Ιούνιος 2021

## Μεγέθη Κίνησης



### 1. Που βρίσκεται ένα αντικείμενο;

Η **θέση**  $\vec{x}$  ενός αντικειμένου ορίζεται σε σχέση με κάποιο σημείο αναφοράς.

Π.χ. Η θέση του ανθρώπου είναι  $x_A = +3\text{m}$ , η θέση της γάτας είναι  $x_\Gamma = -2\text{m}$  σε σχέση με το σημείο O που είναι το σημείο αναφοράς.

### 2. Πόσο και προς τα που μετακινείται;

Η **μετατόπιση**  $\Delta\vec{x}$  ενός αντικειμένου δείχνει πόσο έχει αλλάξει η θέση του, αλλά και προς ποια κατεύθυνση.

$$\Delta\vec{x} = \vec{x}_{\text{τελ}} - \vec{x}_{\text{αρχ}}$$

Όπου  $x_{\text{τελ}}$  &  $x_{\text{αρχ}}$  είναι η τελική και η αρχική του θέση αντίστοιχα.

- ✓ Π.χ. Στο παραπάνω σχήμα, η γάτα για να φτάσει τον άνθρωπο πρέπει να μετατοπιστεί κατά :
- ✓  $\Delta x_\Gamma = x_{\text{τελ}\Gamma} - x_{\text{αρχ}\Gamma} = (3 - (-2))\text{m} = 5\text{m}$ .
- ✓ Αντίθετα για να φτάσει ο άνθρωπος στην γάτα, πρέπει να μετατοπιστεί κατά:
- ✓  $\Delta x_A = x_{\text{τελ}A} - x_{\text{αρχ}A} = (-2 - 3)\text{m} = -5\text{m}$ .
- ✓ (Το αρνητικό πρόσημο δείχνει ότι πρέπει να κινηθεί προς τα αριστερά).

### 3. Πόσο γρήγορα γίνεται η κίνηση;

Η **ταχύτητα**  $\vec{v}$  δείχνει το πόσο γρήγορα και το προς τα πού (κατεύθυνση) γίνεται η κίνηση. Είναι ίση με τον ρυθμό μεταβολής της θέσης:

$$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}$$

Μονάδα της στο διεθνές σύστημα είναι: m/s

Άλλη συνηθισμένη μονάδα είναι τα km/h. Ισχύει ότι  $\frac{1km}{h} = \frac{1000m}{3600s} = \frac{10}{36} m/s$

- ✓ Αν ο άνθρωπος αλλάξει θέση με την γάτα, και μετατοπιστεί σε χρόνο  $\Delta t = 2s$ , η ταχύτητα του θα είναι :

$$v_A = \frac{\Delta x_A}{\Delta t} = -2,5 m/s$$

Αντίστοιχα η ταχύτητα της γάτας θα είναι :

$$v_G = \frac{\Delta x_G}{\Delta t} = 2,5 m/s$$

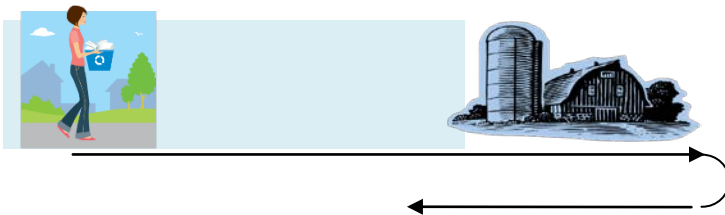
➤ Παρατήρηση:

Η θέση, η μετατόπιση, η ταχύτητα, είναι διανυσματικά μεγέθη, άρα εκτός από μέτρο έχουν και φορά (π.χ., δεξιά, αριστερά, πάνω, κάτω ...). Η φορά τους δηλώνεται με το πρόσημο που έχουν. Στο προηγούμενο παράδειγμα, ο άνθρωπος και η γάτα έχουν ταχύτητα ίδιου μέτρου αλλά αντίθετης φοράς. Στη γλώσσα των μαθηματικών, το μέτρο μαζί με το πρόσημο, δίνουν την «αλγεβρική τιμή» του μεγέθους

#### 4. Πόση διαδρομή έχει διανύσει το αντικείμενο;

Το μήκος της διαδρομής που διανύει ένα αντικείμενο είναι το **διάστημα s**, και είναι μονόμετρο μέγεθος. Παίρνει πάντα θετικές τιμές.

- ✓ Μία κοπέλα προχωράει 100m μπροστά και 50 μέτρα προς τα πίσω. Το συνολικό διάστημα που διένυσε είναι  $s_{ολ} = 150m$ .



#### 5. Η ταχύτητα κατά την διάρκεια μιας διαδρομής αλλάζει. Το αντικείμενο πηγαίνει γρήγορα, αργά, σταματάει, γυρνάει πίσω κ.λ.π. Πόσο γρήγορα γίνεται η συνολική κίνηση;

Η σταθερή ταχύτητα που θα έπρεπε να έχει το αντικείμενο ώστε να διανύσει το ίδιο συνολικό διάστημα ( $s_{ολ}$ ) στον ίδιο χρόνο ( $\Delta t_{ολ}$ ), είναι η **μέση ταχύτητα** του κινητού:

$$v_{\mu} = \frac{s_{ολ}}{\Delta t_{ολ}}$$

- ✓ Ένα όχημα διανύει απόσταση  $s_1 = 200\text{m}$  σε χρόνο  $\Delta t_1 = 100\text{s}$ . Κατόπιν σταματάει για  $\Delta t_2 = 50\text{s}$  και στην συνέχεια διανύει άλλα  $400\text{m}$  σε χρόνο  $\Delta t_3 = 150\text{s}$ . Έτσι:

Το συνολικό διάστημα που διένυσε είναι

$$S_{\text{ολ}} = (200+400)\text{m} = 600\text{m}$$

Η συνολική διάρκεια της κίνησης είναι  $\Delta t_{\text{ολ}} = (100+50+150)\text{s} = 300\text{s}$ .

Η μέση ταχύτητα είναι :  $v_{\mu} = \frac{600\text{m}}{300\text{s}} = 2\text{m/s}$

➤ Παρατήρηση:

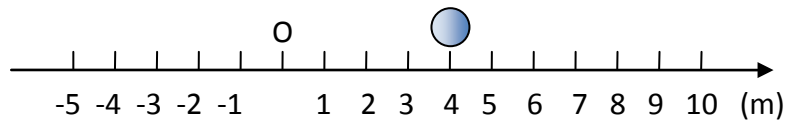
Στο προηγούμενο παράδειγμα: Η ταχύτητα στο πρώτο κομμάτι της κίνησης ήταν:

$$v_1 = \frac{200}{100} \text{ m/s} = 2\text{m/s}. \text{ Στο δεύτερο κομμάτι της κίνησης είναι } v_2 = \frac{400}{150} \text{ m/s} =$$

$2,67\text{m/s}$ . Η μέση τιμή αυτών των δύο ταχυτήτων είναι  $\frac{(2+2,67)}{2}\text{m/s} = 2,335\text{m/s}$  που βέβαια **δεν είναι ίδια** με την μέση ταχύτητα  $v_{\mu}$  στην διάρκεια της κίνησης.

**Εφαρμογές – Ασκήσεις**

1. Στο διπλανό σχήμα, μία μπάλα μετακινείται από την θέση  $x_1 = 4\text{m}$ , στην θέση  $x_2 = 2\text{m}$ ,



σε χρόνο  $\Delta t_1 = 4\text{s}$ . Στην συνέχεια μετακινείται στην θέση  $x_3 = 6\text{m}$ . Η κίνηση της αυτή διαρκεί  $\Delta t_2 = 5\text{s}$ . Τέλος, σε χρόνο  $\Delta t_3 = 10\text{s}$  μετακινείται στην θέση  $x_4 = -2\text{m}$ .

- A.** Να σημειώσετε τις διαδοχικές θέσεις της μπάλας στο σχήμα.
- B.** Πόση είναι η μετατόπισή της σε κάθε μία από τις τρεις επιμέρους κινήσεις;
- Γ.** Να υπολογίσετε την ταχύτητά της σε κάθε μία κίνηση.
- Δ.** Πόση είναι η μέση ταχύτητα της μπάλας για την συνολική κίνηση;
2. Ένα αυτοκίνητο διανύει μία διαδρομή  $10\text{km}$  σε χρόνο  $15\text{min}$ .
- A.** Πόση είναι η μέση ταχύτητά του;
- B.** Μπορούμε να γνωρίζουμε την ταχύτητα που είχε την χρονική στιγμή  $t = 10\text{min}$  μετά την εκκίνησή του;
- Γ.** Ένα δεύτερο αυτοκίνητο θέλει να διανύσει την ίδια απόσταση στον ίδιο χρόνο, με σταθερό μέτρο ταχύτητας. Πόση θα πρέπει να είναι η ταχύτητα αυτή;



## Ευθύγραμμες Κινήσεις

### Α. Όταν η θέση αλλάζει με σταθερό ρυθμό...

#### 1. Οι εξισώσεις της κίνησης.

Η ταχύτητα  $u$  έχει σταθερό μέτρο (και κατεύθυνση). Άρα, σε ίσους χρόνους διανύονται ίσες αποστάσεις.

Η μετατόπιση  $\Delta x$  είναι ανάλογη του χρόνου  $\Delta t$  που διαρκεί η κίνηση.

$$\Delta x = v \cdot \Delta t \quad (1)$$

Επειδή  $\Delta x = x_{\text{τελ}} - x_{\text{αρχ}}$ , μπορούμε να γράψουμε:

$$\Delta x = v \cdot \Delta t \Rightarrow x - x_{\text{αρχ}} = v \cdot \Delta t \Rightarrow x = x_{\text{αρχ}} + v \cdot \Delta t \quad (2)$$

...όπου με  $x$  συμβολίζουμε την (τελική) θέση στην οποία βρίσκεται το αντικείμενο μετά από  $\Delta t$  χρονική διάρκεια κίνησης.

Το διάστημα που διανύει το αντικείμενο υπολογίζεται:

$$S = |v| \cdot \Delta t \quad (3)$$

Η κίνηση που περιγράψαμε (κίνηση με σταθερή ταχύτητα), λέγεται και «ευθύγραμμη ομαλή κίνηση».

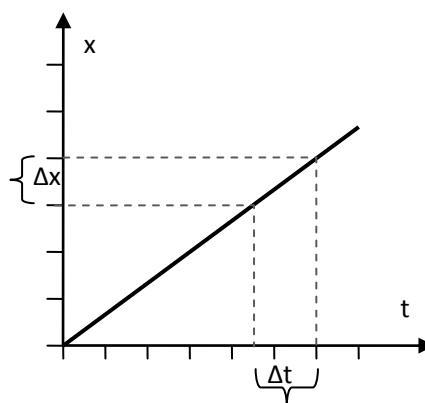
- ✓ Π.χ... Ένα τραίνο κινείται με σταθερή ταχύτητα  $u = -10\text{m/s}$ . Αρχικά βρίσκεται στην θέση  $x_{\text{αρχ}} = 50\text{m}$  (σε σχέση με τον σταθμό, δηλ. το σημείο αναφοράς). Μετά από χρόνο  $\Delta t = 40\text{s}$ :  
Θα έχει μετατοπιστεί κατά  $\Delta x = u \cdot \Delta t = -400\text{m}$  και θα έχει διανύσει διάστημα  $s = 400\text{m}$ .  
Θα έχει βρεθεί στην θέση  $x = x_{\text{αρχ}} + u \cdot \Delta t = -350\text{m}$ .
- ✓ Τα αρνητικά πρόσημα στην μετατόπιση  $\Delta x$  και την θέση  $x$  δηλώνουν ότι έχει μετατοπιστεί αριστερά και έχει βρεθεί αριστερά της αρχικής του θέσης.

#### ➤ Παρατηρήσεις:

- ❖ Στις εξισώσεις (1) και (2) δεν χρησιμοποιούμε διανυσματικούς συμβολισμούς. Η κίνηση γίνεται σε ευθεία γραμμή και αρκεί το πρόσημο για να δηλώσουμε την κατεύθυνση των διανυσματικών μεγεθών.
- ❖ Στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση, η μέση ταχύτητα είναι συνεχώς ίση με το μέτρο της στιγμιαίας ταχύτητας.

## 2. Η γραφική αναπαράσταση της κίνησης...

Στο **διάγραμμα θέσης - χρόνου** ( $x - t$ ) η κίνηση αναπαρίσταται στον κατακόρυφο άξονα (θέση  $x$ ) ενώ η χρονική της διάρκεια φαίνεται στον οριζόντιο άξονα (χρόνος  $t$ ). Σε ίσες χρονικές διάρκειες  $\Delta t$ , διανύεται πάντα η ίδια απόσταση  $\Delta x$ , έτσι το διάγραμμα είναι ευθεία γραμμή με κλίση ανάλογη της ταχύτητας.



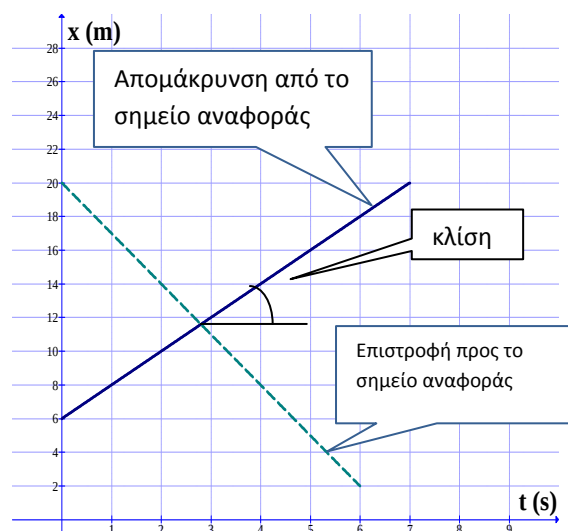
### Διάγραμμα θέσης - χρόνου (για $t_{αρχ} = 0$ )

Η εξίσωση από την οποία προκύπτει το διάγραμμα είναι:  $x = x_{αρχ} + v \cdot t$

Η κλίση του διαγράμματος δίνει την ταχύτητα κίνησης,  $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ .

Το διάγραμμα ξεκινάει από την θέση που βρισκόταν αρχικά τα αντικείμενο,  $x_{αρχ}$ .

Όταν το αντικείμενο απομακρύνεται από το σημείο αναφοράς (0) η απόσταση του αυξάνεται ενώ, όταν κινείται προς αυτό, η απόσταση ελαττώνεται.



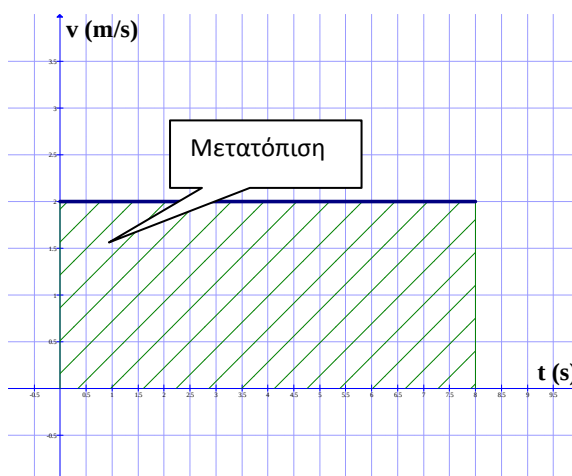
### Διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου (για $t_{αρχ} = 0$ )

Η ταχύτητα είναι σταθερή, δηλαδή, κάθε χρονική στιγμή έχει την ίδια τιμή:

$$v = \text{σταθ.}$$

Η κλίση του διαγράμματος είναι μηδέν, αφού η ταχύτητα δεν αλλάζει.

Το εμβαδόν που ορίζεται από το διάγραμμα και τον άξονα του χρόνου, αριθμητικά δίνει την μετατόπιση.



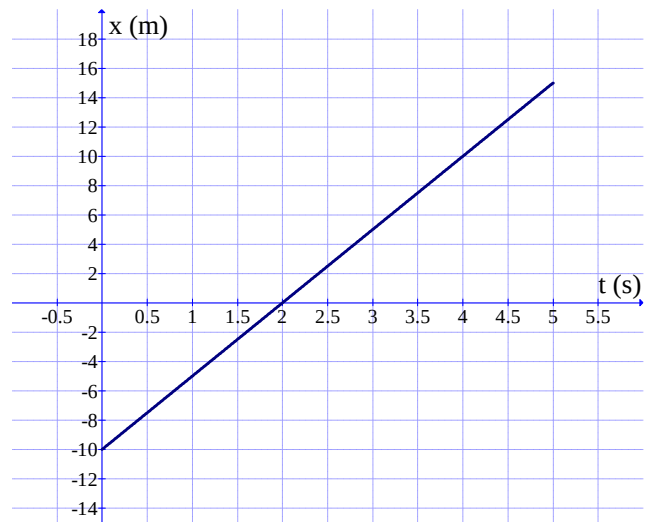
## ✓ Εφαρμογή ...

Ένα αντικείμενο κινείται σε ευθεία τροχιά με ταχύτητα μέτρου  $5\text{m/s}$ , προς την θετική κατεύθυνση. Την χρονική στιγμή  $t_{\text{αρχ}} = 0$ , βρίσκεται στην θέση  $x_{\text{αρχ}} = -10\text{m}$ , δηλ., η εξίσωση της θέσης του είναι:

$$x = -10 + 5 \cdot t$$

Έτσι, η θέση του στις χρονικές στιγμές  $t_1 = 2\text{s}$ ,  $t_2 = 4\text{s}$  φαίνεται στον διπλανό πίνακα. Με την βοήθειά τους μπορούμε να φτιάξουμε το διάγραμμα θέσης - χρόνου για την κίνησή του.

|        |    |     |
|--------|----|-----|
| Χρόνος | 2s | 4s  |
| Θέση   | 0  | 10m |



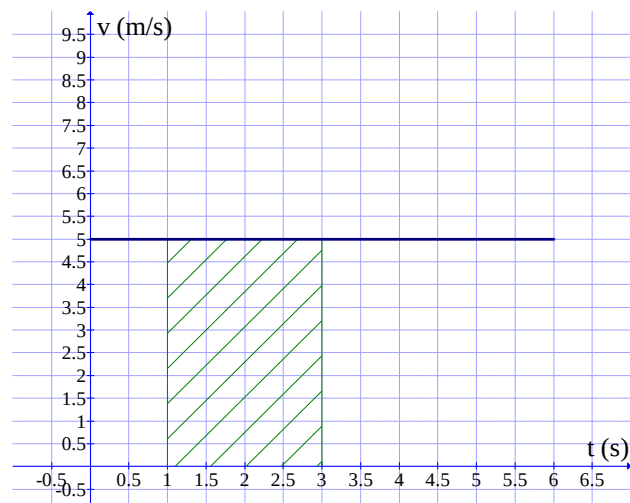
Η κλίση του διαγράμματος  $x - t$  δίνει την ταχύτητα (η κλίση είναι σταθερή, όπως και η ταχύτητα):

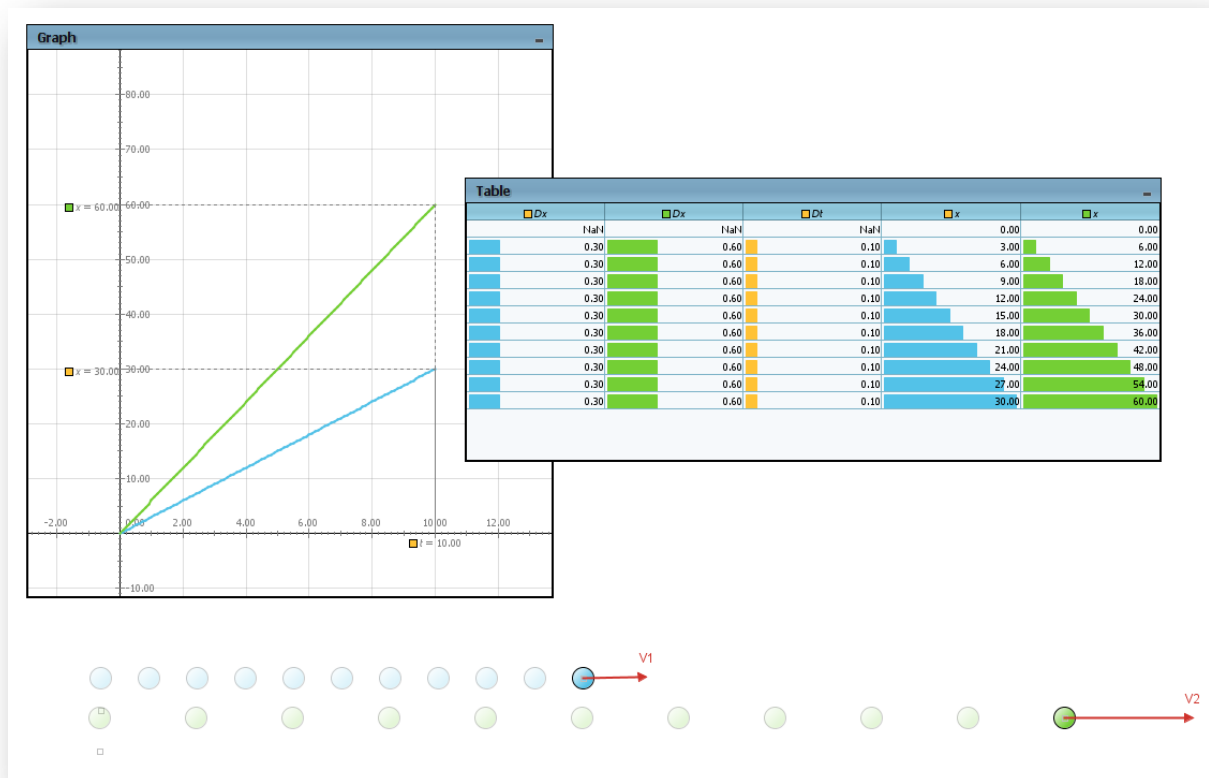
$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{10 - 0}{4 - 2} \text{ m/s} = 5 \text{ m/s}$$

Από το διάγραμμα της ταχύτητας μπορούμε να υπολογίσουμε ότι η μετατόπισή του για  $\Delta t = (3-1)\text{s} = 2\text{s}$ , είναι:

$$\text{Εμβαδόν} = \Delta x = 10\text{m}$$

Αντίστοιχα, το διάστημα που έχει διανύσει είναι  $S = 10\text{m}$ .





Εικόνα 1: Μελέτη Ευθ. Ομαλής Κίνησης με την βοήθεια Η/Υ.

**Εφαρμογές – Ασκήσεις**

1. Ένα τραίνο που αρχικά βρίσκεται στην θέση  $x_{\text{αρχ}} = 50\text{m}$ , κινείται με σταθερή ταχύτητα  $u = 15\text{m/s}$ .
  - A. Να υπολογίσετε την μετατόπισή του μετά από  $\Delta t = 30\text{s}$ , καθώς και το διάστημα που θα έχει διανύσει.
  - B. Ποια είναι τότε η θέση του;
  - Γ. Ποια θα ήταν η μετατόπισή του και ποια η θέση του αν η ταχύτητα του ήταν  $u' = -5\text{m/s}$ ;
2. Ένας πεζοπόρος αρχικά βρίσκεται στην αφετηρία της διαδρομής του ( $x_{\text{αρχ}} = 0$ ) και την χρονική στιγμή  $t_0 = 0$  αρχίζει να περπατάει με σταθερή ταχύτητα  $u = 2\text{m/s}$ .
  - A. Που θα βρίσκεται την χρονική στιγμή  $t = 5\text{s}$ ;
  - B. Που θα βρισκόταν αν είχε ξεκινήσει  $20\text{m}$  μπροστά από την αφετηρία, μετά από ίδια χρονική διάρκεια κίνησης;
  - Γ. Ποια είναι η μετατόπισή του, σε κάθε μία περίπτωση, A και B;
3. Ένας ποδηλάτης βρίσκεται  $20$  μέτρα αριστερά του σημείου που θεωρούμε ως σημείο αναφοράς για την κίνησή του. Αρχικά κινείται για χρόνο  $\Delta t_1 = 10\text{s}$  με σταθερή ταχύτητα  $u_1 = -2\text{m/s}$ . Στην συνέχεια κινείται για χρόνο  $\Delta t_2 = 5\text{s}$  με ταχύτητα  $u_2 = 6\text{m/s}$ .
  - A. Που θα έχει φτάσει μετά τα πρώτα  $10\text{s}$  της κίνησής του;
  - B. Που θα βρίσκεται στο τέλος της συνολικής του κίνησης;
  - Γ. Ποια είναι η μετατόπισή του, σε κάθε μία περίπτωση (A. και B.);
  - Δ. Ποιο είναι το συνολικό διάστημα που έχει διανύσει;
4. Ένα αντικείμενο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση. Η ταχύτητα του είναι  $4\text{m/s}$  και η θέση από όπου άρχισε η κίνησή του είναι  $x_{\text{αρχ}} = -10\text{m}$ .
  - A. Να υπολογίσετε την θέση του τις χρονικές στιγμές  $t_1 = 2\text{s}$ ,  $t_2 = 2,5\text{s}$  και  $t_3 = 5\text{s}$ .
  - B. Φτιάξτε το διάγραμμα θέσης χρόνου για την κίνηση του αντικειμένου.
  - Γ. Φτιάξτε διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου για την κίνηση.

**Δ.** Για την ίδια κίνηση, σχεδιάστε το διάγραμμα διαστήματος – χρόνου.

5. Ένα αντικείμενο κινείται σε ευθεία τροχιά, με τον εξής τρόπο:

Αρχικά ( $t_{\text{αρχ}} = 0$ ) βρίσκεται στην θέση  $x_{\text{αρχ}} = 0$ . Μετακινείται με σταθερή ταχύτητα και την χρονική στιγμή  $t_1 = 5\text{s}$  φτάνει στην θέση  $x_1 = 10\text{m}$ . Στην θέση αυτή παραμένει ακίνητο μέχρι την χρονική στιγμή  $t_2 = 7\text{s}$ . Στην συνέχεια μετακινείται στην θέση  $x_3 = 4\text{m}$ , όπου φτάνει την χρονική στιγμή  $t_3 = 10\text{s}$

**Α.** Σχεδιάστε το διάγραμμα θέσης χρόνου ( $x-t$ ) για την συνολική του κίνηση.

**Β.** Πόση είναι η ταχύτητά του στα χρονικά διαστήματα  $\Delta t_A(0 \rightarrow 5\text{s})$ ,  $\Delta t_B(5\text{s} \rightarrow 7\text{s})$ ,

$\Delta t_C(7\text{s} \rightarrow 10\text{s})$ ;

**Γ.** Σχεδιάστε το διάγραμμα της ταχύτητάς του σε συνάρτηση με τον χρόνο κίνησης.

**Δ.** Πόση είναι η μέση ταχύτητα στην διάρκεια της κίνησής του;

6. Η ευθύγραμμη κίνηση ενός αντικείμενου περιγράφεται από το διπλανό διάγραμμα θέσης - χρόνου.

**Α.** Με την βοήθεια του διαγράμματος, απαντήστε τις επόμενες ερωτήσεις.

i) Τι είδους κίνηση εκτελεί το αντικείμενο; (Αιτιολογείστε την απάντησή σας).

ii) Που βρισκόταν την χρονική στιγμή  $t_{\text{αρχ}} = 0$ ;

iii) Πόση είναι η ταχύτητά του;



Στην συνέχεια, χρησιμοποιώντας τις απαντήσεις σας στα προηγούμενα ερωτήματα:

**Β.** Φτιάξτε το διάγραμμα ταχύτητας – χρόνου ( $v-t$ )

**Γ.** Γράψτε την εξίσωση της θέσης του σε συνάρτηση με τον χρόνο

**Δ.** Υπολογίστε την θέση του την χρονική στιγμή  $t = 4\text{s}$ .

## Β. Όταν η ταχύτητα αλλάζει με σταθερό ρυθμό...

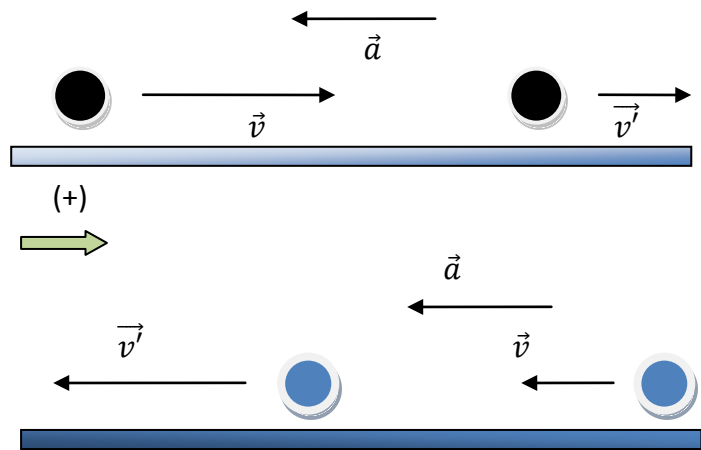
### 1. Πως αλλάζει η ταχύτητα (...πόσο και προς τα πού;)

Η **επιτάχυνση**  $\vec{a}$  είναι το φυσικό μέγεθος που δείχνει το πόσο γρήγορα και προς τα πού αλλάζει η ταχύτητα, δηλαδή είναι ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας.

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Η επιτάχυνση είναι διανυσματικό μέγεθος. Ωστόσο, αν η κίνηση γίνεται σε ευθεία τροχιά (μια διάσταση) αρκεί το πρόσημο της για να δηλώσουμε την κατεύθυνση.

- ✓ Π.χ. ... Σε μία ευθύγραμμη κίνηση, κάποια στιγμή η ταχύτητα του αντικειμένου είναι  $u = 2\text{m/s}$  και η επιτάχυνση του είναι  $a = -1\text{m/s}^2$ . Αυτό σημαίνει ότι η ταχύτητα και η επιτάχυνση έχουν αντίθετη κατεύθυνση. Σε κάποια άλλη περίπτωση, η ταχύτητα του αντικειμένου είναι  $u = -4\text{m/s}$  και η επιτάχυνση  $a = -4\text{m/s}^2$ . Τότε τα διανύσματα  $\vec{v}$  και  $\vec{a}$  έχουν την ίδια φορά (και τα δύο αριστερά)...



Μονάδα επιτάχυνσης είναι  $\text{m/s}^2$  (στο διεθνές σύστημα S.I.)

### 2. Η κίνηση - εξισώσεις.

Όταν η επιτάχυνση  $\vec{a}$  έχει **ίδια κατεύθυνση** με την ταχύτητα  $\vec{v}$ , το μέτρο της ταχύτητας αυξάνεται και η κίνηση είναι **επιταχυνόμενη**. Στην αντίθετη περίπτωση (που η ταχύτητα και η επιτάχυνση είναι αντίρροπες), το μέτρο της ταχύτητας ελαττώνεται και η κίνηση είναι **επιβραδυνόμενη**.

Όταν η επιτάχυνση είναι **σταθερή**, οι κινήσεις ονομάζονται «ευθύγραμμη **ομαλά** επιταχυνόμενη» και «ευθύγραμμη **ομαλά** επιβραδυνόμενη», αντίστοιχα. Η μεταβολή της ταχύτητας είναι ανάλογη με του χρόνου.

Σύμφωνα με τον ορισμό της επιτάχυνσης,  $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ . Άρα:

$$\Delta v = a \cdot \Delta t \Rightarrow v - v_{\alpha\rho\chi} = a \cdot \Delta t$$

και

$$v = v_{\alpha\rho\chi} + a \cdot \Delta t \quad (4)$$

Όπου  $v$  είναι η τελική ταχύτητα του κινητού, που έχει κινηθεί με επιτάχυνση για χρονική διάρκεια  $\Delta t$ .

Τα μεγέθη  $v_{\alpha\rho\chi}$  και  $a$  τα αντικαθιστούμε με τα πρόσημά τους στην εξίσωση (4).

- ✓ Αν για παράδειγμα η ταχύτητα και η επιτάχυνση έχουν αντίθετο πρόσημο, τότε η κίνηση είναι επιβραδυνόμενη, η εξίσωση (4) θα πάρει την μορφή:

$$|v| = |v_{\alpha\rho\chi}| - |a| \cdot \Delta t$$

Στην εξίσωση αυτή, που μπορούμε να την εφαρμόσουμε γενικά στην **επιβραδυνόμενη κίνηση**, το πρόσημο (-) δηλώνει ότι η επιτάχυνση  $\vec{a}$  και η ταχύτητα  $\vec{v}_{\alpha\rho\chi}$  έχουν αντίθετη φορά, και το μέτρο της ταχύτητας ελαττώνεται.

Η μετατόπιση του αντικειμένου, όταν υπάρχει σταθερή επιτάχυνση, δίνεται από την εξίσωση:

$$\Delta x = v_{\alpha\rho\chi} \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot \Delta t^2 \quad (5)$$

Η θέση θα υπολογίζεται:

$$x = x_{\alpha\rho\chi} + \Delta x$$

ή

$$x = x_{\alpha\rho\chi} + v_{\alpha\rho\chi} \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot \Delta t^2 \quad (6)$$

Και σε αυτές τις εξισώσεις, (5 & 6) αντικαθιστούμε τα μεγέθη  $x_{\alpha\rho\chi}$ ,  $v_{\alpha\rho\chi}$  και  $a$  με τα πρόσημα τους.

- Σε μια επιβραδυνόμενη κίνηση, όπου η ταχύτητα και η επιτάχυνση έχουν αντίθετο πρόσημο, μπορούμε να υπολογίσουμε το διάστημα που διανύει **επιβραδυνόμενο** το αντικείμενο, από την εξίσωση:

$$s = |v_{\alpha\rho\chi}| \cdot \Delta t - \frac{1}{2} \cdot |a| \cdot \Delta t^2 \quad (7)$$



Το (-) δηλώνει ότι η επιτάχυνση και η ταχύτητα έχουν αντίθετο πρόσημο. Έτσι το διάστημα που θα διανύσει το κινητό είναι μικρότερο από αυτό που θα διένυε αν διατηρούσε την ταχύτητά το σταθερή.

- Αν θέλουμε να υπολογίσουμε τον χρόνο που χρειάζεται για να σταματήσει, ένα αντικείμενο που επιβραδύνεται με σταθερό ρυθμό, μπορούμε να σκεφτούμε ως εξής:

Πόση γίνεται η ταχύτητα την στιγμή που σταματάει; → μηδέν!

Άρα, αφού η κίνηση είναι επιβραδυνόμενη, γράφουμε:

$$v = |v_{\alpha\rho\chi}| - |\alpha| \cdot \Delta t \Rightarrow 0 = |v_{\alpha\rho\chi}| - |\alpha| \cdot \Delta t \Rightarrow \boxed{\Delta t = \frac{|v_{\alpha\rho\chi}|}{|\alpha|}}$$

Πόσο απόσταση διένυσε το αντικείμενο μέχρι να σταματήσει;

Χρησιμοποιούμε την **εξίσωση του διαστήματος (7)** για την επιβραδυνόμενη κίνηση, αντικαθιστώντας **τον χρόνο που υπολογίσαμε πριν!**

$$s = |v_{\alpha\rho\chi}| \cdot \Delta t - \frac{1}{2} \cdot |\alpha| \cdot \Delta t^2 \Rightarrow s = |v_{\alpha\rho\chi}| \cdot \frac{|v_{\alpha\rho\chi}|}{|\alpha|} - \frac{1}{2} \cdot |\alpha| \cdot \left(\frac{|v_{\alpha\rho\chi}|}{|\alpha|}\right)^2$$

Κάνοντας τις πράξεις, καταλήγουμε:

$$\boxed{s = \frac{v_{\alpha\rho\chi}^2}{2|\alpha|}}$$

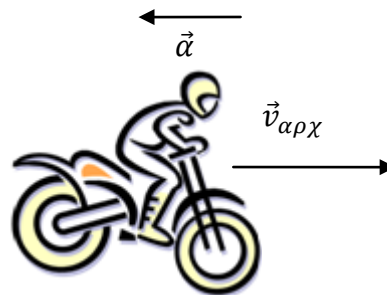
### ✓ Παραδείγματα.

- Μία μοτοσυκλέτα κινείται αρχικά με ταχύτητα 30m/s. Κάποια στιγμή ο οδηγός βλέπει ένα εμπόδιο και αρχίζει να ελαττώνει την ταχύτητά του με σταθερό ρυθμό 4m/s<sup>2</sup>. Έτσι μετά από χρόνο Δt = 2s, η ταχύτητά του θα έχει γίνει:

$$v = |v_{\alpha\rho\chi}| - |\alpha| \cdot \Delta t = (30 - 4 \cdot 2) \text{ m/s} = 22 \text{ m/s}$$

Η απόσταση που θα έχει διανύσει σε αυτό τον χρόνο θα είναι:

$$s = |v_{\alpha\rho\chi}| \cdot \Delta t - \frac{1}{2} |\alpha| \cdot \Delta t^2 = (30 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4) \text{ m} = 52 \text{ m}.$$



Ο χρόνος που χρειάζεται για να σταματήσει είναι:

$$\Delta t = \frac{|v_{\alpha\rho\chi}|}{|\alpha|} = \frac{30}{4} \text{ s} = 7,5 \text{ s}$$

Η απόσταση που διανύει μέχρι να σταματήσει είναι :

$$s = \frac{v_{\alpha\rho\chi}^2}{2|\alpha|} = \frac{900}{8} \text{ s} = 112,5 \text{ m}$$

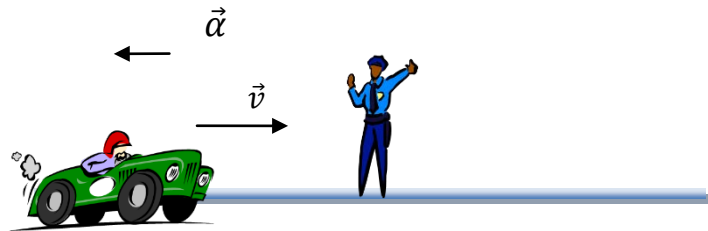
2. Ένα αυτοκίνητο περνά μπροστά από τον τροχονόμο που βρίσκεται στην θέση  $x_{\alpha\rho\chi} = 2\text{m}$ , με ταχύτητα  $u_{\alpha\rho\chi} = 15\text{m/s}$  και επιτάχυνση  $a = -3\text{m/s}^2$ .

Δύο δευτερόλεπτα μετά που πέρασε από τον τροχονόμο, η ταχύτητα του θα είναι :

$$u = u_{\alpha\rho\chi} + a \cdot \Delta t \Rightarrow$$

$$u = [15 + (-3) \cdot 2]\text{m/s} \Rightarrow$$

$$u = 9\text{m/s}$$



Η θέση στην οποία θα βρίσκεται είναι:

$$x = x_{\alpha\rho\chi} + u_{\alpha\rho\chi} \cdot \Delta t + \frac{1}{2} a \cdot \Delta t^2 = [2 + 15 \cdot 2 + \frac{1}{2} (-3) \cdot 4]\text{m} = 26\text{m}.$$

Η μετατόπιση του είναι:

$$\Delta x = u_{\alpha\rho\chi} \cdot \Delta t + \frac{1}{2} a \cdot \Delta t^2 = [15 \cdot 2 + \frac{1}{2} (-3) \cdot 4]\text{m} = 24\text{m}.$$

Το διάστημα που διένυσε, αφού η κίνηση είναι επιβραδυνόμενη συνεχώς, υπολογίζεται:

$$s = |u_{\alpha\rho\chi}| \cdot \Delta t - \frac{1}{2} |a| \cdot \Delta t^2 = [15 \cdot 2 - \frac{1}{2} 3 \cdot 4]\text{m} = 24\text{m}$$

3. Σε μία άλλη περίπτωση, ένα αντικείμενο περνάει από την θέση  $x_{\alpha\rho\chi} = 0$  την χρονική στιγμή  $t_0 = 0$  με ταχύτητα  $u_{\alpha\rho\chi} = -4\text{m/s}$  και επιτάχυνση  $a = 1\text{m/s}^2$ .

Την χρονική στιγμή  $t_1 = 2\text{s}$ , η ταχύτητά του είναι:

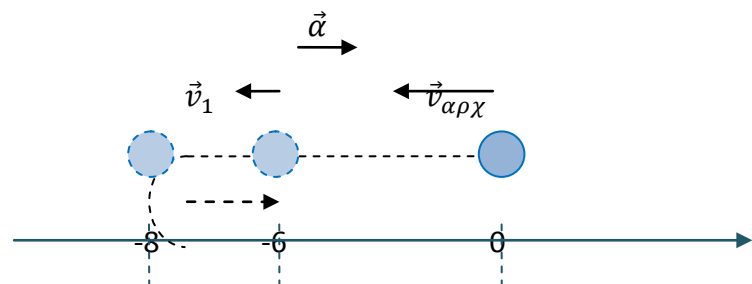
$$u_1 = u_{\alpha\rho\chi} + a \cdot t \Rightarrow$$

$$u_1 = (-4 + 1 \cdot 2)\text{m/s} \Rightarrow$$

$$u_1 = -2\text{m/s}.$$

Δηλαδή το αντικείμενο

συνεχίζει να κινείται προς τα αρνητικά (αριστερά) με ταχύτητα μέτρου  $2\text{m/s}$ .



Την χρονική στιγμή  $t_2 = 4\text{s}$ , η ταχύτητά του είναι:

$$u_2 = (-4 + 1 \cdot 4)\text{m/s} = 0, \text{ δηλαδή το αντικείμενο σταματάει.}$$

Την χρονική στιγμή  $t_3 = 6\text{s}$ :

$u_3 = (-4 + 1 \cdot 6)\text{m/s} = 2\text{m/s}$ . Το αντικείμενο αφού σταμάτησε, άρχισε να επιταχύνεται προς την θετική κατεύθυνση και τώρα κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα μέτρου  $2\text{m/s}$ . (ταχύτητα και επιτάχυνση έχουν τώρα και τα δύο θετικό πρόσημο).

Η θέση του κάθε χρονική στιγμή δίνεται από την εξίσωση:

$$x = x_{\text{αρχ}} + v_{\text{αρχ}} \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2.$$

Έτσι:

$$x_1 = (-4 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4) \text{m} = -6 \text{m}$$

$$x_2 = (-4 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 16) \text{m} = -8 \text{m}$$

$$x_3 = (-4 \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 36) \text{m} = -6 \text{m}.$$

Η συνολική του μετατόπιση είναι:

$$\Delta x_{\text{ολ}} = x_3 - x_{\text{αρχ}} = (-6 - 0) \text{m} = -6 \text{m}.$$

Ή, χρησιμοποιώντας την εξίσωση...:

$$\Delta x_{\text{ολ}} = v_{\text{αρχ}} \cdot \Delta t_{\text{ολ}} + \frac{1}{2} a \cdot \Delta t_{\text{ολ}}^2 = (-4 \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6^2) \text{m} = -6 \text{m}.$$

### 3. Διαγράμματα.

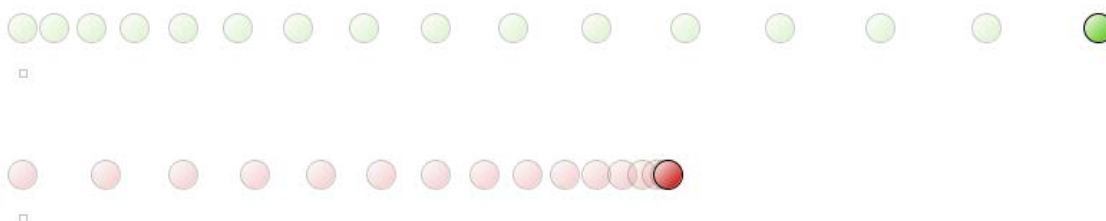
Το μέγεθος που διατηρείται σταθερό είναι η **επιτάχυνση**. Έτσι, αν την παραστήσουμε γραφικά σε σχέση με τον χρόνο, σε κάθε χρονική στιγμή η επιτάχυνση θα είναι η ίδια.

Η ταχύτητα, μεταβάλλεται με σταθερό ρυθμό. Άρα, σε ίσα χρονικά διαστήματα μεταβάλλεται κατά το ίδιο ποσό και η τιμή της κάθε χρονική στιγμή είναι ανάλογη του χρόνου.

- ✓ Π.χ. Για επιτάχυνση  $a = 2 \text{m/s}^2$  και αρχική ταχύτητα  $v_{\text{αρχ}} = 0$ , η ταχύτητα και οι μεταβολές της φαίνονται στον διπλανό πίνακα. (ανά 2s η ταχύτητα αλλάζει κατά 4m/s).

- ✓ Η μετατόπιση του αντικειμένου, σε ίσους χρόνους, είναι όλο και μεγαλύτερη (στην επιταχυνόμενη κίνηση) ή όλο και μικρότερη (στην επιβραδυνόμενη κίνηση). (Εικόνα 2).

| $v(\text{m/s})$ | $t(\text{s})$ | $\Delta v(\text{m/s})$ | $\Delta t(\text{s})$ |
|-----------------|---------------|------------------------|----------------------|
| 0               | 0             | 0                      | 0                    |
| 4               | 2             | $4 - 0 = 4$            | $2 - 0 = 2$          |
| 8               | 4             | $8 - 4 = 4$            | $4 - 2 = 2$          |
| 12              | 6             | $12 - 8 = 4$           | $6 - 4 = 2$          |
| 16              | 8             | $16 - 12 = 4$          | $8 - 6 = 2$          |
| 20              | 10            | $20 - 16 = 4$          | $10 - 8 = 2$         |
| 24              | 12            | $24 - 20 = 4$          | $12 - 10 = 2$        |

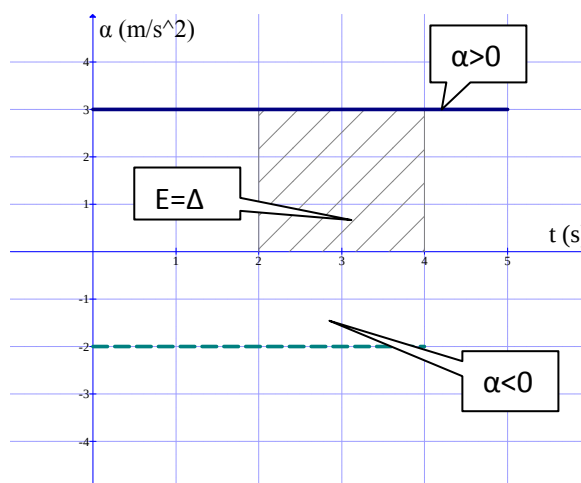


Εικόνα 2: Ευθ. ομαλά επιταχυνόμενη/επιβραδυνόμενη κίνηση

**Διάγραμμα επιτάχυνσης - χρόνου**

Η επιτάχυνση είναι σταθερή, για κάθε χρονική στιγμή

Το εμβαδόν που ορίζει η γρ. παράσταση με τον άξονα των χρόνων, δίνει την μεταβολή της ταχύτητας.

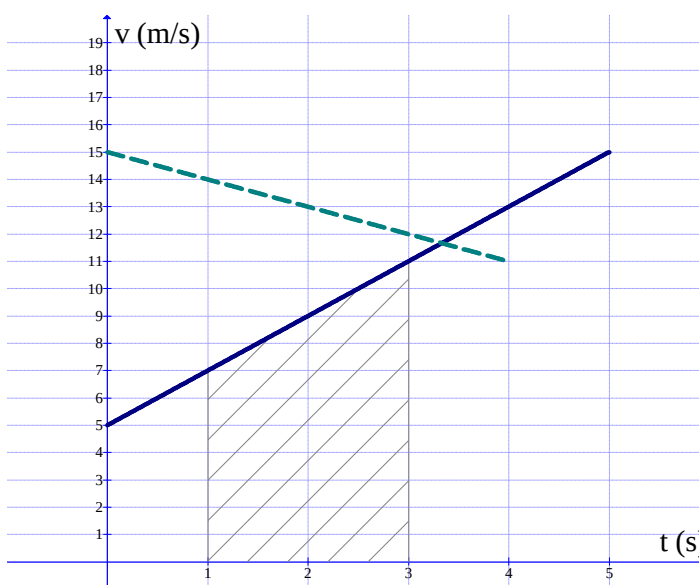
**Διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου**

Η ταχύτητα μεταβάλλεται με σταθερό ρυθμό

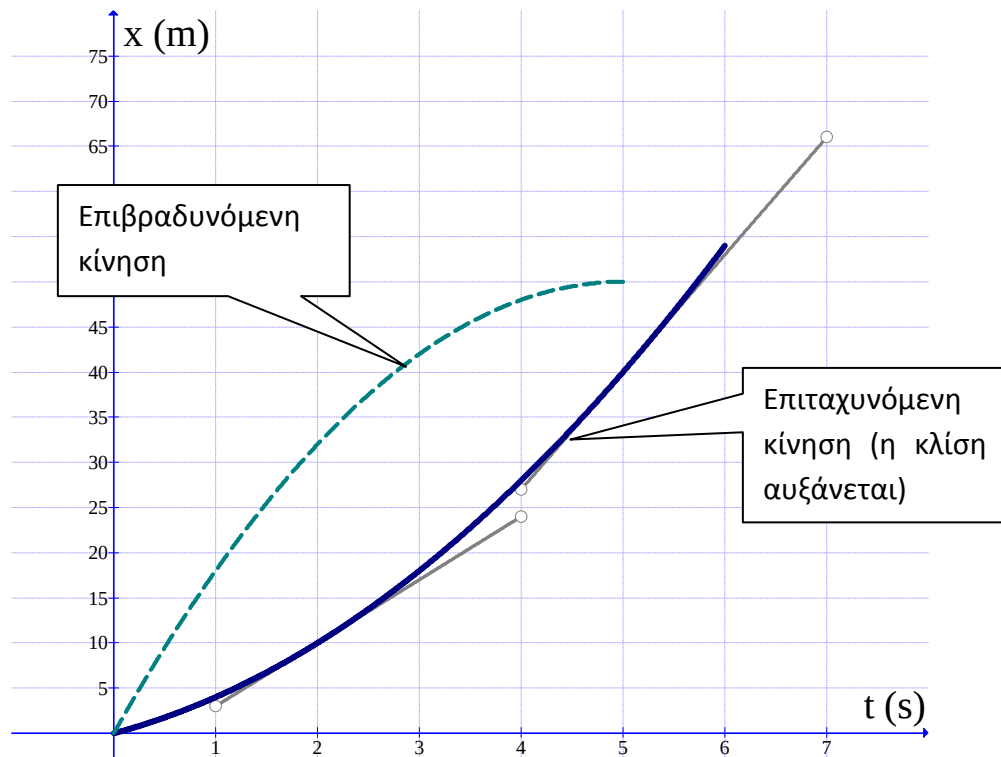
Η κλίση του διαγράμματος δίνει την επιτάχυνση:  $\alpha = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

Από το εμβαδόν του διαγράμματος υπολογίζουμε αριθμητικά την μετατόπιση...

Στην επιταχυνόμενη κίνηση, η ταχύτητα ξεκινάει από μία αρχική τιμή και αυξάνεται. Αντίθετα, στην επιβραδυνόμενη, ελαττώνεται από την αρχική της τιμή.



## Διάγραμμα θέσης – χρόνου

➤ Παρατήρηση

Στην επιταχυνόμενη κίνηση: Η θέση μεταβάλλεται όλο και πιο γρήγορα. **Πως φαίνεται αυτό από το διάγραμμα;**

Η κλίση δίνει την ταχύτητα, που συνεχώς αυξάνεται. Έτσι αντίστοιχα αυξάνεται και η κλίση και το διάγραμμα τελικά έχει την μορφή της καμπύλης του σχήματος (...παραβολή).

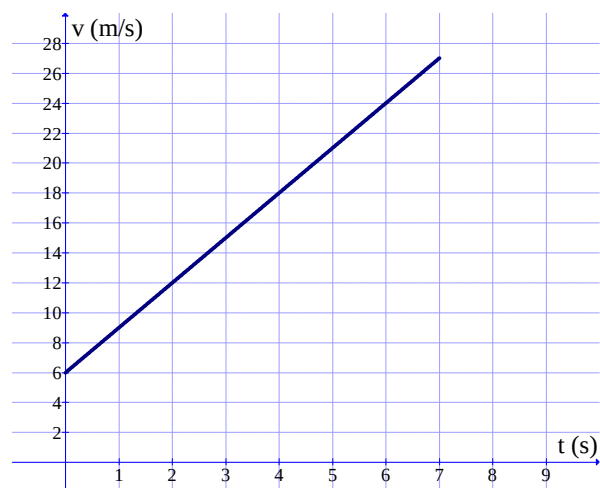
Αντίστοιχα, στο διάγραμμα της επιβραδυνόμενης κίνησης, η ταχύτητα όπως και κλίση ελαττώνεται ...

**Εφαρμογές – Ασκήσεις**

1. Μία σφαίρα κινείται σε ευθεία γραμμή με σταθερή επιτάχυνση  $a = 2\text{m/s}^2$ . Την χρονική στιγμή  $t_{\text{αρχ}} = 0$  βρίσκεται στην θέση  $x_{\text{αρχ}} = 4\text{m}$  και κινείται με ταχύτητα  $v_{\text{αρχ}} = 3\text{m/s}$ :
  - A.** Τι είδους κίνηση εκτελεί; (αιτιολογείστε την απάντησή σας).
  - B.** Πόση ταχύτητα θα έχει αποκτήσει την χρονική στιγμή  $t = 2\text{s}$ ;
  - Γ.** Πόση θα είναι η μετατόπισή του την χρονική στιγμή αυτή;
  - Δ.** Ποια θα είναι η θέση του τότε;
  
2. Ένα αντικείμενο κινείται σε ευθεία γραμμή με σταθερή επιτάχυνση  $a = -2\text{m/s}^2$ . Την χρονική στιγμή  $t_{\text{αρχ}} = 0$  βρίσκεται στην θέση  $x_{\text{αρχ}} = 0$ , με ταχύτητα  $v_{\text{αρχ}} = 4\text{m/s}$ :
  - A.** Τι είδους κίνηση εκτελεί; (αιτιολογείστε την απάντησή σας).
  - B.** Πόση ταχύτητα θα έχει αποκτήσει την χρονική στιγμή  $t = 1\text{s}$ ;
  - Γ.** Πόση θα είναι η μετατόπισή του την χρονική στιγμή  $t$ ;
  - Δ.** Ποια θα είναι η θέση του τότε;
  
3. Ένα ποδήλατο κινείται σε ευθύ δρόμο με σταθερή επιτάχυνση  $a = 2\text{m/s}^2$ . Την χρονική στιγμή  $t_{\text{αρχ}} = 0$  και κινείται με ταχύτητα  $v_{\text{αρχ}} = -5\text{m/s}$ :
  - A.** Τι είδους κίνηση εκτελεί; (αιτιολογείστε την απάντησή σας).
  - B.** Πόση ταχύτητα θα έχει αποκτήσει την χρονική στιγμή  $t = 1\text{s}$ ;
  - Γ.** Πόση θα είναι η μετατόπισή του την χρονική στιγμή αυτή;
  - Δ.** Πόσο διάστημα θα έχει διανύσει τότε;
  
4. Ένα αυτοκίνητο κινείται σε ευθύ δρόμο, με ταχύτητα μέτρου  $v_{\text{αρχ1}} = 4\text{m/s}$ . Κάποια στιγμή ο οδηγός αρχίζει να αυξάνει την ταχύτητα του οχήματος με σταθερό ρυθμό  $2\text{m/s}^2$ , για χρονική διάρκεια  $\Delta t = 2\text{s}$ . Την ίδια στιγμή ένα δεύτερο αυτοκίνητο που αρχικά ήταν ακίνητο, αρχίζει να επιταχύνεται με την ίδια επιτάχυνση για την ίδια χρονική διάρκεια.
  - A.** Γράψτε τις εξισώσεις που περιγράφουν την ταχύτητα και την μετατόπιση κάθε οχήματος, σε σχέση με τον χρόνο.

- Β.** Πόση είναι η ταχύτητα του κάθε οχήματος στο τέλος της επιταχυνόμενης κίνησης;
- Γ.** Πόση είναι η μετατόπιση του κάθε ενός οχήματος στην διάρκεια των 2s;
5. Μία μοτοσυκλέτα, αρχικά ακίνητη, αρχίζει να επιταχύνεται με επιτάχυνση  $\alpha_1 = 1\text{m/s}^2$ , για χρονική διάρκεια  $\Delta t = 1\text{s}$ . Στην συνέχεια επιταχύνεται για  $\Delta t_2 = 2\text{s}$  με επιτάχυνση  $\alpha_2 = 0,5\text{m/s}^2$ .
- Α.** Πόση είναι η ταχύτητά της μετά το τέλος του πρώτου δευτερολέπτου;
- Β.** Με ποια ταχύτητα αρχίζει το δεύτερο μέρος της επιταχυνόμενης της κίνησης ( $\Delta t_2$ );
- Γ.** Πόση ταχύτητα έχει στο τέλος της κίνησης της;
6. Δύο οχήματα κινούνται στον ίδιο ευθύ δρόμο, με επιταχύνσεις σταθερού μέτρου. Το όχημα Α την χρονική στιγμή  $t_{\text{αρχ}} = 0$  βρίσκεται στην θέση  $x_{\text{αρχΑ}} = 20\text{m}$ , έχει ταχύτητα  $u_{\text{αρχΑ}} = 8\text{m/s}$  και επιτάχυνση  $\alpha_A = 6\text{m/s}^2$ . Το όχημα Β την ίδια χρονική στιγμή βρίσκεται στην θέση  $x_{\text{αρχΒ}} = 60\text{m}$  έχει ταχύτητα  $u_{\text{αρχΒ}} = -4\text{m/s}$  και επιτάχυνση  $\alpha_B = -2\text{m/s}^2$ .
- Α.** Τι είδους κίνηση κάνει το κάθε όχημα;
- Β.** Γράψτε τις εξισώσεις της ταχύτητας και της θέσης με τον χρόνο, για τα δύο οχήματα.
- Γ.** Με πόση ταχύτητα θα κινούνται την χρονική στιγμή  $t = 1\text{s}$  και σε ποια θέση θα βρίσκονται;
- Δ.** Που θα βρίσκεται το κάθε όχημα την χρονική στιγμή  $t = 2\text{s}$ ;
7. Ένα αντικείμενο κινείται αρχικά με ταχύτητα μέτρου  $6\text{m/s}$  και αρχίζει να επιβραδύνεται με σταθερό ρυθμό  $3\text{m/s}^2$ , μέχρι να σταματήσει.
- Α.** Πόσο χρόνο χρειάζεται μέχρι να σταματήσει;
- Β.** Πόση απόσταση διανύει μέχρι τότε;
- Γ.** Υπολογίστε τον χρόνο που χρειάστηκε μέχρι να υποδιπλασιαστεί η ταχύτητά του.
- Δ.** Πόση απόσταση διένυσε στον χρόνο αυτό;
8. Ένα εργαστηριακό αμαξάκι που αρχικά ήταν ακίνητο στην θέση  $x_{\text{αρχ}} = 0$ , αρχίζει να κινείται με σταθερή επιτάχυνση μέτρου  $\alpha = 1\text{m/s}^2$ .

- Α.** Γράψτε τις εξισώσεις που περιγράφουν την ταχύτητα και την θέση του, συναρτήσει του χρόνου.
- Β.** Αφού φτιάξετε τον κατάλληλο πίνακα τιμών, σχεδιάστε τα διαγράμματα της επιτάχυνσης και της ταχύτητάς του, σε συνάρτηση με τον χρόνο.
- Γ.** Υπολογίστε (με την βοήθεια των διαγραμμάτων) την μεταβολή της ταχύτητας του και την μετατόπισή του στο χρονικό διάστημα από  $t_1 = 2s$  μέχρι  $t_2 = 4s$ .
- Δ.** Φτιάξτε το διάγραμμα της θέσης του, συναρτήσει του χρόνου κίνησης.
9. Ένα αντικείμενο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση μέχρι να σταματήσει. Αν η αρχική του ταχύτητα είναι  $u_{αρχ} = +40m/s$  και η επιτάχυνση του έχει μέτρο  $4m/s^2$ .
- Α.** Φτιάξτε το διάγραμμα της επιτάχυνσης του, συναρτήσει του χρόνου .
- Β.** Φτιάξτε το διάγραμμα στο οποίο φαίνεται ο τρόπος που μεταβάλλεται η ταχύτητα του συναρτήσει του χρόνου κίνησης.
- Γ.** Με την βοήθεια του διαγράμματος, υπολογίστε την απόσταση που διανύει μέχρι να μηδενιστεί η ταχύτητά του.
- Δ.** Φτιάξτε το διάγραμμα της θέσης του, συναρτήσει του χρόνου.
10. Η ταχύτητα του κινητού σε μία ευθύγραμμη, μεταβαλλόμενη κίνηση φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα. Αρχικά το αντικείμενο βρίσκεται στην θέση  $x_{αρχ} = 0$ .
- Α.** Τι είδους κίνηση εκτελεί ; Εξηγείστε.
- Β.** Υπολογίστε την επιτάχυνση του.
- Γ.** Πόση είναι η μετατόπιση του στα πρώτα 4 δευτερόλεπτα της κίνησης;
- Δ.** Γράψτε τις εξισώσεις που περιγράφουν την ταχύτητα και την θέση του, συναρτήσει του χρόνου.
- Ε.** Φτιάξτε το διάγραμμα της επιτάχυνσης με τον χρόνο.
- Στ.** Σχεδιάστε το διάγραμμα της θέσης με τον χρόνο.





## Οι δυνάμεις...

### 1. Η αιτία που «σπρώχνει» ή «τραβάει»...

- ✓ Αφήνουμε μία πέτρα ελεύθερη να κινηθεί και αυτή πέφτει επειδή την έλκει η γή. Η έλξη αυτή περιγράφεται με την βοήθεια της **δύναμης της βαρύτητας** ή αλλιώς «**βάρος**».
- ✓ Ένας εργάτης σπρώχνει ένα κιβώτιο. Η άπωση αυτή περιγράφεται με την βοήθεια της **δύναμης** που ασκεί ο εργάτης.
- ✓ Κρεμάμε ένα βαρίδι στο ελατήριο και αυτό επιμηκύνεται για να κρατήσει το σώμα. Το ελατήριο τραβάει προς τα απάνω με μία **ελαστική δύναμη**, λόγω της παραμόρφωσης του.

### 2. Συμβολισμός, μονάδες, σχεδίαση...

Force  $\rightarrow \dots \vec{F}$

Μονάδα: 1N (1N = 1kg·m/s<sup>2</sup>)

Η δύναμη είναι διανυσματικό μέγεθος. Ανάλογα με το σημείο του σώματος στο οποίο ασκείται και την κατεύθυνση της, μπορεί να προκαλέσει διαφορετικό αποτέλεσμα.

#### ➤ Παρατήρηση

Όταν μελετάμε την **μεταφορική** κίνηση ενός σώματος, θεωρούμε ότι οι δυνάμεις ασκούνται στο κέντρο μάζας του και τις σχεδιάζουμε εκεί.

### 3. Πώς αντιλαμβανόμαστε ότι ασκείται δύναμη σε ένα σώμα;

Την δύναμη δεν την βλέπουμε, αντιλαμβανόμαστε όμως ότι ασκείται από τα αποτελέσματά της δράσης της: Την ισορροπία ενός σώματος, την αλλαγή της κινητικής του κατάστασης (...επιτάχυνση), την παραμόρφωση του...

- ✓ Σε κάθε σώμα γνωρίζουμε ότι ασκείται το βάρος του. Αν λοιπόν ένα αντικείμενο ισορροπεί, κάποια (-ες) άλλη δύναμη θα ασκείται με τέτοιο τρόπο ώστε “εξουδετερώνει” την δράση του βάρους.
- ✓ Όταν ένα εργαστηριακό αμαξάκι αρχίζει να επιταχύνεται, συμπεραίνουμε ότι κάποια επιπλέον δύναμη του ασκήθηκε, ώστε αυτό να αρχίσει να κινείται πιο γρήγορα
- ✓ Για να είναι τεντωμένο ένα ελατήριο, κάποιος πρέπει να το τραβήξει...

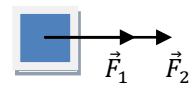
➤ Παρατήρηση

Οι δυνάμεις ασκούνται από επαφή (όταν ακουμπάμε το σώμα) ή από απόσταση (π.χ. η γη έλκει τη σελήνη).

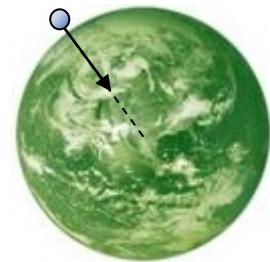
**4. Τι θα συμβεί αν σε ένα σώμα ασκούνται πολλές δυνάμεις;**

Την **συνολική** δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα την ονομάζουμε και **συνισταμένη** ( $\Sigma \vec{F}$ ). Η συνισταμένη μπορεί να αντικαταστήσει όλες τις υπόλοιπες δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα, προκαλώντας το ίδιο αποτέλεσμα με αυτές (π.χ., επιταχύνοντάς το).

- ✓ Στο αντικείμενο του σχήματος όπου  $F_1 = 2\text{N}$  και  $F_2 = 3\text{N}$  ασκείται συνολικά δύναμη  $\Sigma F = F_1 + F_2 = 5\text{N}$ .
- ✓ Αν ι δυνάμεις είχαν αντίθετη φορά, η συνολική δύναμη θα ήταν  $\Sigma F = F_1 - F_2 = -1\text{N}$ .

**5. Δυνάμεις στην φύση****Ο Βαρύτητα**

Ασκείται ανάμεσα σε δύο οποιαδήποτε υλικά σώματα και είναι πάντα ελκτική. Η βαρυτική δύναμη που ασκεί η γη στα σώματα (...**βάρος**) υπολογίζεται:



$$w = m \cdot g$$

Η κατεύθυνση του βάρους είναι πάντα προς το κέντρο της γης (κατακόρυφη).

- ✓ Π.χ., η μάζα ενός μαθητή είναι  $m = 60\text{kg}$ . Το βάρος του ...  $w = m \cdot g$  δηλ., είναι περίπου  $600\text{N}$ .
- ✓ Ένας αστροναύτης έχει μάζα  $160\text{kg}$ . Το βάρος του στην γη είναι  $1600\text{N}$ . Στην σελήνη είναι περίπου  $400\text{N}$ , ενώ στο διάστημα .... μηδέν! Όμως η μάζα του είναι παντού η ίδια.

➤ Παρατηρήσεις

- ❖ Η **μάζα m** είναι το μέγεθος που δείχνει την ποσότητα ύλης του σώματος και την μετράμε σε κιλά (kg). Όσο μεγαλύτερη είναι, τόσο ισχυρότερη είναι η δύναμη της βαρύτητας.
- ❖ Η **σταθερά "g"** είναι ίδια για όλα τα σώματα, λέγεται επιτάχυνση της βαρύτητας και η τιμή της εξαρτάται από τον τόπο στον οποίο μετράμε το βάρος. Προσεγγιστικά είναι  $g = 10\text{m/s}^2$ .

### Ο Ελαστικές δυνάμεις

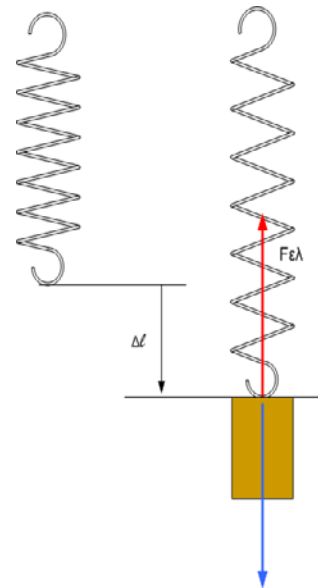
Ένα παραμορφωμένο (τεντωμένο ή συμπιεσμένο) ελατήριο, ασκεί δύναμη ανάλογη της παραμόρφωσης του  $\Delta x$  (ή  $\Delta \ell$ ).

$$F_{ελ} = -k \cdot \Delta x$$

Η σταθερά αναλογίας  $k$  έχει σχέση με το είδος του ελατηρίου (πόσο σκληρό ή μαλακό είναι).

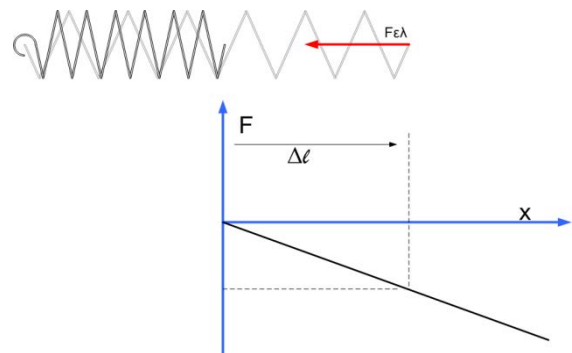
Η δύναμη και η παραμόρφωση έχουν αντίθετες κατευθύνσεις (πρόσημο -).

- ✓ Το σώμα βάρους  $w = 5\text{N}$  που ισορροπεί κρεμασμένο από ένα ελατήριο, δέχεται δύναμη  $F_{ελ}$  με μέτρο  $5\text{N}$ .
- ✓ Η δύναμη αυτή μεταβάλλεται. Αν τεντώσουμε λίγο περισσότερο το ήδη τεντωμένο ελατήριο, η δύναμη  $F_{ελ}$  θα αυξηθεί, σε αντίθεση με το βάρος που παραμένει σταθερό.



### ➤ Παρατηρήσεις

- ❖ Την παραμόρφωση  $\Delta x$  την μετράμε πάντα από το φυσικό μήκος του ελατηρίου.
- ❖ Επειδή η δύναμη του ελατηρίου είναι ανάλογη της παραμόρφωσης, η γραφική παράσταση που συνδέει την δύναμη με την παραμόρφωση θα είναι όπως στο διπλανό σχήμα.



**Εφαρμογές – Ασκήσεις.**

1. Ένα βιβλίο βρίσκεται ακίνητο πάνω στο τραπέζι. Ποιες δυνάμεις δέχεται; Να τις σχεδιάσετε.



2. Δύο σώματα έχουν μάζα  $m_1=5\text{kg}$  και  $m_2=10\text{kg}$ . Το βάρος του κάθε ενός είναι αντίστοιχα:

**A.** 5kg και 10kg

**B.** 5N και 10N

**Γ.** 50N και 100N.

Με ποια από τις προηγούμενες συμφωνείτε;

3. Πόσο βάρος έχει ένα δοχείο μάζας 50kg; Θεωρείστε ότι  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

4. Τραβάμε από το άκρο του ένα ελατήριο σταθεράς  $k = 200\text{N/m}$  και το επιμηκύνουμε κατά  $\Delta x_1 = 5\text{cm}$ .

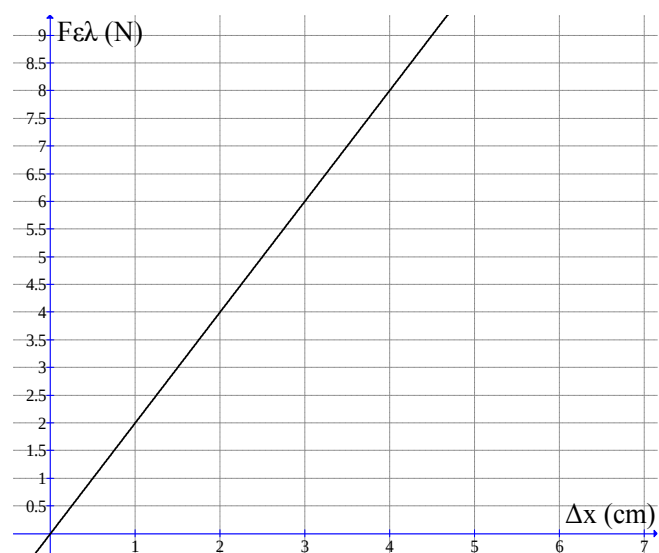
**A.** Υπολογίστε το μέτρο της δύναμης που ασκεί στο χέρι μας.

**B.** Αν τραβήξουμε επιπλέον κατά  $\Delta x_2 = 5\text{cm}$ , πόση θα γίνει η προηγούμενη δύναμη;

5. Στο διπλανό διάγραμμα φαίνεται το μέτρο της δύναμης που ασκεί ένα ελατήριο σε συνάρτηση με την παραμόρφωσή του.

**A.** Πόση είναι η δύναμη που ασκεί όταν η παραμόρφωση είναι  $\Delta x = 2\text{cm}$ ;

**B.** Υπολογίστε την σταθερά του ελατηρίου.



6. Ένα ελατήριο έχει σταθερά  $k = 100\text{N/m}$ . Φτιάξτε την γραφική παράσταση του μέτρου της δύναμης του ελατηρίου σε σχέση με την παραμόρφωση του  $\Delta x$ .

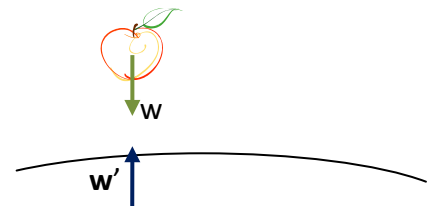
## Οι νόμοι των δυνάμεων

### 1. Η «αλληλεπίδραση»:

Οι δυνάμεις στη φύση εμφανίζονται σε ζευγάρια: «Δράση – Αντίδραση». Έτσι, κάθε σώμα που ασκεί σε ένα άλλο μία δύναμη -«δράση», δέχεται από αυτό μία αντίθετη δύναμη - «αντίδραση» (... 3<sup>ος</sup> νόμος του Νεύτωνα).

$$\vec{F}_{\delta\rho} = - \vec{F}_{\alpha\nu\tau}$$

- ✓ Το φορτηγό τραβάει το trailer προς τα μπροστά (δράση). Το trailer τραβάει το φορτηγό προς τα πίσω (αντίδραση).
- ✓ Η γη έλκει τη σελήνη υποχρεώνοντας την να περιστρέφεται γύρω της. Η σελήνη έλκει την γη (δημιουργώντας π.χ., την παλίρροια...).
- ✓ Η γη έλκει το μήλο με δύναμη  $w = 0,5N$  και το μήλο πέφτει κάτω. Αντίστοιχα, το μήλο έλκει τη γη με δύναμη  $w' = 0,5N$  προς τα πάνω. Βέβαια, η δύναμη αυτή δεν είναι αρκετή για να καταφέρει να κινήσει ολόκληρη την γη!!!



#### ➤ Παρατηρήσεις:

- ❖ Η δράση και η αντίδραση είναι αντίθετες δυνάμεις (ίσο μέτρο, αντίθετη φορά).
- ❖ Ασκούνται πάντα σε διαφορετικά σώματα, άρα, δεν εξουδετερώνονται.

### 2. Ο νόμος της αδράνειας (ή αλλιώς 1<sup>ος</sup> Νόμος του Νεύτωνα):

Κάθε σώμα έχει από την φύση του την τάση (...αδράνεια) να παραμείνει στην κινητική κατάσταση που βρίσκεται. Μάλιστα, όσο μεγαλύτερη είναι η μάζα του  $m$ , τόσο πιο δύσκολα μπορεί να αλλάξει η κατάσταση αυτή... Έτσι:

Αν το σώμα ήταν ακίνητο, παραμένει ακίνητο. Αν κινούταν, συνεχίζει να κινείται χωρίς να αλλάξει η ταχύτητα του.



Άρα, για να αλλάξει η κινητική κατάσταση, πρέπει να εμφανιστεί κάποιο εξωτερικό αίτιο. Και αυτό δεν είναι άλλο από την δύναμη!

Αντίστροφα: Αν δεν υπάρχει καμία εξωτερική αιτία (δηλαδή ή δεν ασκούνται δυνάμεις, ή αν ασκούνται εξουδετερώνονται), το σώμα ή παραμένει ακίνητο, ή κινείται με σταθερή ταχύτητα.

- ✓ Το τραπέζι, στην άκρη του δωματίου... Αν δεν το μετακινήσουμε εμείς ασκώντας του κάποια δύναμη, δεν πρόκειται να κινηθεί (αφού το βάρος του εξουδετερώνεται από την δύναμη που ασκεί το πάτωμα).
- ✓ Ένας κομήτης που κινείται στο διάστημα... Αλλάζει τον τρόπο κίνησής του (καμπυλώνεται η τροχιά του ή κινείται πιο γρήγορα) μόνο όταν περάσει κοντά από κάποιο άλλο ουράνιο σώμα που του ασκεί ελκτική δύναμη.
- ✓ Η μπάλα του μπιλιάρδου είναι ακίνητη μέχρι να της ασκήσουμε δύναμη με την στέκα. Μετά κινείται με σταθερή ταχύτητα, μέχρι να της ασκηθεί ξανά δύναμη (π.χ. λόγω σύγκρουσης).



➤ Παρατήρηση:

Η μάζα, εκτός από μέγεθος που δείχνει την ύλη, είναι το φυσικό μέγεθος που μετράει και την αδράνεια του σώματος.

### 3. Πως η δύναμη επηρεάζει την κίνηση; (ο θεμελιώδης νόμος της μηχανικής)

... «Όταν συνολικά δεν ασκείται δύναμη, η ταχύτητα του σώματος δεν αλλάζει». Άρα, όταν ασκείται δύναμη σε ένα σώμα (ή οι δυνάμεις που ασκούνται δεν εξουδετερώνονται), η ταχύτητα του θα αλλάξει δηλ. θα αποκτάει **επιτάχυνση**.

Η **επιτάχυνση** που αποκτάει είναι **ανάλογη** της **συνολικής δύναμης** που δέχεται.

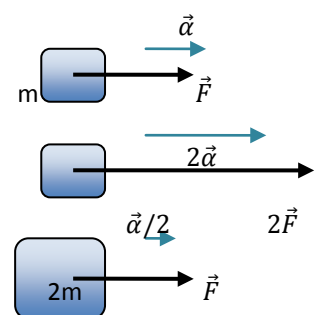
Όσο μεγαλύτερη είναι η μάζα του σώματος, τόσο περισσότερο αντιδράει το σώμα στην αλλαγή της κινητικής του κατάστασης και τόσο πιο δύσκολα επιταχύνεται. Άρα η επιτάχυνση είναι **αντιστρόφως ανάλογη** της **μάζας**.

Όλα τα προηγούμενα συνοψίζονται στην εξίσωση:

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$\Sigma \vec{F}$  είναι η συνισταμένη (συνολική) δύναμη που δέχεται το σώμα,  $m$  η μάζα του και  $\vec{a}$  η επιτάχυνση που αποκτάει.

- ✓ Ένα αντικείμενο μάζας  $m_1 = 2\text{kg}$ , αποκτάει επιτάχυνση  $a = 2\text{m/s}^2$ , όταν δεχτεί συνολική δύναμη  $F = 4\text{N}$ . Αν η δύναμη διπλασιαστεί ( $2F=8\text{N}$ ) αντίστοιχα θα διπλασιαστεί και η επιτάχυνση του,  $2a = 4\text{m/s}^2$ .
- ✓ Αν η προηγούμενη δύναμη ( $F = 4\text{N}$ ) ασκηθεί σε σώμα διπλάσιας μάζας,  $2m = 4\text{kg}$ , η επιτάχυνση που θα προκαλέσει θα είναι η μισή από την  $a$ , δηλαδή  $a/2 = 1\text{m/s}^2$ .



➤ Παρατήρηση:

Η δύναμη και η επιτάχυνση έχουν πάντα την ίδια κατεύθυνση.

#### 4. Πως συνδέονται οι «εξισώσεις των κινήσεων» με τον «θεμελιώδη νόμο της μηχανικής»;

Αν  $\Sigma \vec{F} = 0$ , τότε δεν προκαλείται επιτάχυνση άρα η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλή:

$$v = \text{σταθ.} \quad \& \quad \Delta x = v \cdot \Delta t$$

Αν  $\Sigma \vec{F} \neq 0$  και συγχρόνως είναι **σταθερή** και **παράλληλη** στην αρχική ταχύτητα, προκαλείται σταθερή επιτάχυνση και η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη:

$$v = |v_{\text{αρχ}}| \pm |\alpha| \cdot \Delta t \quad \& \quad \Delta x = |v_{\text{αρχ}}| \cdot \Delta t \pm \frac{1}{2} |\alpha| \cdot \Delta t^2$$

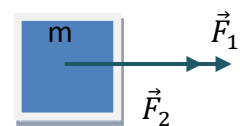
Αν  $\Sigma \vec{F} \neq 0$  χωρίς όμως να παραμένει σταθερή, τότε προκαλείται επιτάχυνση που μεταβάλλεται, και δεν ισχύουν οι γνωστές εξισώσεις των κινήσεων. Αν μάλιστα η δύναμη σχηματίζει γωνία με την αρχική ταχύτητα, προκαλείται καμπυλόγραμμη κίνηση...

➤ Παρατηρήσεις

- ❖ Η κίνηση ενός αντικείμενου, καθορίζεται από τις δυνάμεις που του ασκούνται.
- ❖ Αν γνωρίζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται σε ένα αντικείμενο και την αρχική του ταχύτητα, μπορούμε να προβλέψουμε το είδος της κίνησης που θα εκτελέσει (και να εφαρμόσουμε τις αντίστοιχες εξισώσεις).
- ❖ Οι δυνάμεις θεωρούμε ότι ασκούνται στα σώματα με τέτοιο τρόπο, ώστε να μην μπορούν να τα περιστρέψουν (π.χ. στο κέντρο μάζας τους...).

✓ **Παραδείγματα:**

1. Σε ένα κουτί μάζας  $m = 3\text{kg}$  ασκούνται ταυτόχρονα και προς την ίδια κατεύθυνση, δύο δυνάμεις με μέτρα  $F_1 = 8\text{N}$  και  $F_2 = 7\text{N}$  αντίστοιχα.



- ο Η συνολική δύναμη που ασκείται στο κουτί είναι:

$$\Sigma F = F_1 + F_2 = 15\text{N}$$

- ο Η επιτάχυνση που αποκτάει λόγω της εφαρμογής των δυνάμεων είναι:

$$\alpha = \frac{\Sigma F}{m} = \frac{15\text{N}}{3\text{kg}} = 5\text{m/s}^2$$

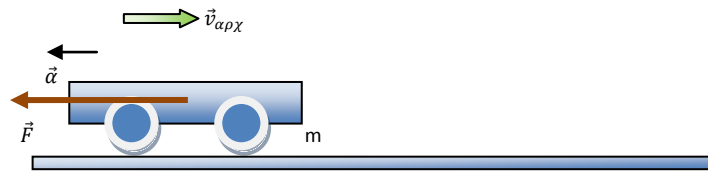
- ο Η ταχύτητα που θα έχει αποκτήσει μετά από  $\Delta t = 2\text{sec}$  είναι:

$$v = \alpha \cdot \Delta t = 5\text{m/s}^2 \cdot 2\text{s} = 10\text{m/s}$$

- ο Η μετατόπισή του στον ίδιο χρόνο είναι:

$$\Delta x = \frac{1}{2} a \cdot \Delta t^2 = \frac{1}{2} \cdot 5 \frac{m}{s^2} \cdot 4s^2 = 10m$$

2. Στο αμαξάκι του σχήματος που κινείται αρχικά με ταχύτητα  $v_{\alpha\rho\chi} = 2m/s$ , ασκείται μία δύναμη μέτρου  $F = 2N$  και φοράς αντίθετης από αυτήν της κίνησης. Η μάζα του είναι  $m = 0,5kg$ .



- ο Η επιτάχυνση που αποκτάει έχει μέτρο:

$$\alpha = \frac{\Sigma F}{m} = \frac{F}{m} = 4m/s^2$$

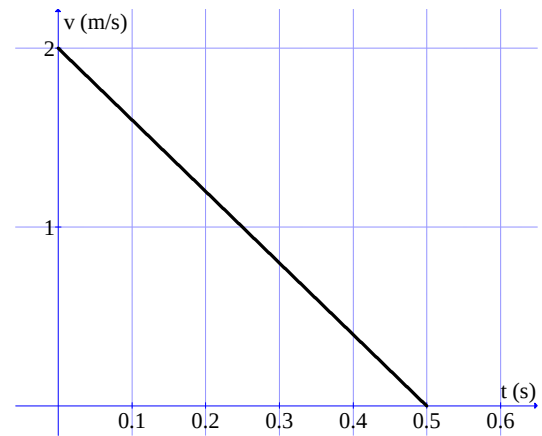
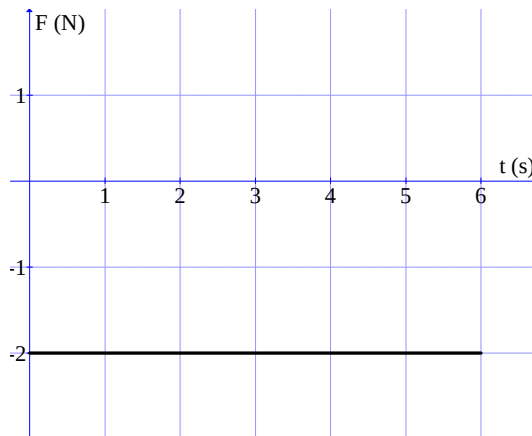
- ο Η φορά της δύναμης άρα και της επιτάχυνσης είναι αντίθετη από αυτήν της ταχύτητας, άρα η κίνηση είναι επιβραδυνόμενη.  
ο Ο χρόνος που χρειάζεται για να σταματήσει ( $v=0$ ) είναι:

$$v = v_{\alpha\rho\chi} - \alpha \cdot \Delta t \Rightarrow 0 = v_{\alpha\rho\chi} - \alpha \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{v_{\alpha\rho\chi}}{\alpha} = 0,5s$$

- ο Η απόσταση που διανύει σε αυτόν τον χρόνο είναι:

$$\Delta x = v_{\alpha\rho\chi} \cdot \Delta t - \frac{1}{2} \alpha \cdot \Delta t^2 = 0,5m.$$

- ο Η γραφική παράσταση της δύναμης με τον χρόνο ( $F-t$ ) και της ταχύτητας με τον χρόνο ( $v-t$ ) φαίνονται στα επόμενα διαγράμματα:



3. Ένα αντικείμενο εκτελεί την κίνηση που περιγράφεται στο επόμενο διάγραμμα θέσης χρόνου.

- ο Η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλή μέχρι την χρονική στιγμή  $t = 6s$ , αφού η θέση είναι ανάλογη με τον χρόνο κίνησης.  
ο Η συνισταμένη των δυνάμεων που δέχεται είναι μηδέν σύμφωνα με τον 1<sup>ο</sup> Νόμο του Νεύτωνα. Αν λοιπόν δέχεται δύναμη τριβής,  $T = 5N$





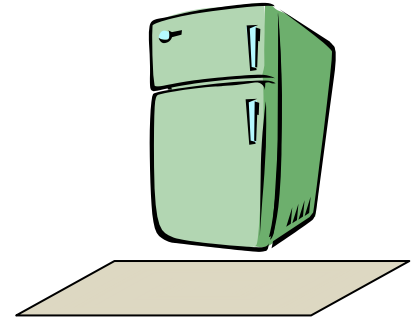
συμπεράνουμε ότι δέχεται και κάποια άλλη αντίθετη δύναμη  $\vec{F}$  που εξουδετερώνει την τριβή, ώστε  $\Sigma \vec{F} = 0$ :

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F - T = 0 \Rightarrow F = T = 5\text{N}$$

- ο Μετά την χρονική στιγμή  $t = 6\text{s}$ , το αντικείμενο παραμένει ακίνητο. Η συνολική δύναμη που δέχεται θα είναι πάλι μηδέν. Μόνο που τώρα, αν δεν ασκείται η τριβή, δεν θα ασκείται και η δύναμη  $\vec{F}$ .

**Εφαρμογές - Ασκήσεις**

1. Το ψυγείο του σχήματος βρίσκεται ακίνητο στο πάτωμα. Αν γνωρίζουμε ότι η μάζα του είναι  $m = 100\text{kg}$ ,



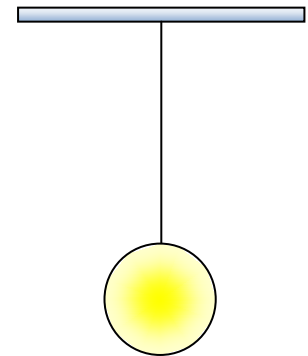
**A.** πόσο είναι το βάρος του;

**B.** Σχεδιάστε όλες τις δυνάμεις που δέχεται αναφέροντας ποιος ασκεί την κάθε μία από αυτές. Είναι κάποιες από αυτές τις δυνάμεις ζεύγος δυνάμεων αλληλεπίδρασης; (δράση – αντίδραση).

**Γ.** Υπολογίστε την δύναμη που ασκεί το πάτωμα στο ψυγείο.

Δίνεται ότι  $g = 10\text{m/s}^2$ .

2. Από το ταβάνι ενός δωματίου κρέμεται ένα φωτιστικό. Αν γνωρίζετε ότι το καλώδιο ασκεί στο φωτιστικό δύναμη μέτρου  $F = 20\text{N}$ :



**A.** Να σχεδιάσετε τις παρακάτω δυνάμεις και να υπολογίσετε τα μέτρα τους:

i. Δύναμη που δέχεται το καλώδιο από το φωτιστικό.

ii. Βάρος του φωτιστικού.

iii. Δύναμη που ασκεί το καλώδιο στο ταβάνι.

**Δ.** Ποιες από τις προηγούμενες δυνάμεις είναι της μορφής δράση – αντίδραση;

Θεωρείστε ότι το βάρος του καλωδίου είναι αμελητέο.

3. Επιλέξτε την σωστή από τις επόμενες ερωτήσεις.

**A.** Όταν σε ένα σώμα ασκούνται σταθερές δυνάμεις, κινείται με σταθερή ταχύτητα.

**B.** Για να κινείται ευθύγραμμα και ομαλά ένα αντικείμενο, πρέπει η συνολική δύναμη που του ασκείται να είναι μηδέν.

**Γ.** Όταν ένα σώμα ισορροπεί, δέχεται μικρότερη δύναμη από όταν κινείται με σταθερή ταχύτητα.

**Δ.** Αν τραβήξουμε ένα σώμα ασκώντας του σταθερή δύναμη οποιασδήποτε τιμής, αυτό θα κινηθεί ευθύγραμμα ομαλά.

4. Ένα αυτοκίνητο κινείται σε ευθύ δρόμο, με ταχύτητα σταθερού μέτρου  $u = 20\text{m/s}$ . Αν γνωρίζουμε ότι η δύναμη που αντιστέκεται στην κίνησή του (αέρας, τριβές) έχει μέτρο  $F_{αντ} = 400\text{N}$ :



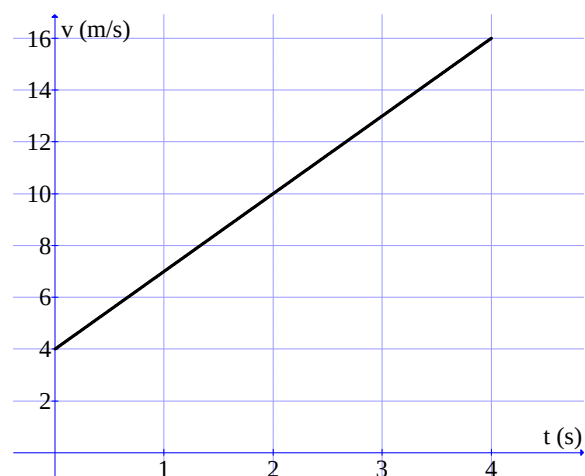
- Α.** Ποιο είναι το μέτρο της δύναμης που βοηθάει την κίνηση του (λόγω της λειτουργίας του κινητήρα);
- Β.** Πόση απόσταση θα έχει διανύσει σε χρόνο  $5\text{min}$ ;
- Γ.** Να φτιάξετε την γραφική παράσταση της ταχύτητας του σε συνάρτηση με τον χρόνο.

5. Οι δυνάμεις  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  και  $\vec{F}_3$  που ασκούνται στο σώμα του διπλανού σχήματος, έχουν μέτρα  $10\text{N}$ ,  $5\text{N}$ , και  $15\text{N}$  αντίστοιχα. Αν η ταχύτητα αρχική του ταχύτητα είναι  $u_{αρχ} = 4\text{m/s}$ ,



- Α.** Να εξετάσετε τι είδους κίνηση εκτελεί το αντικείμενο.
- Β.** Πόση απόσταση θα έχει διανύσει μετά από  $\Delta t = 0,2\text{min}$ ;
- Γ.** Τι κίνηση θα εκτελούσε αν κάποια στιγμή καταργούσαμε την  $\vec{F}_3$ ;

6. Η ταχύτητα ενός αντικειμένου σε συνάρτηση με τον χρόνο φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα. Αν η μάζα του είναι  $m = 6\text{kg}$ , να υπολογίσετε:



- Α.** Το μέτρο της επιτάχυνσης του
- Β.** Το μέτρο της συνισταμένη δύναμης που δέχεται.
- Γ.** Την συνολική απόσταση που θα έχει διανύσει σε χρονική διάρκεια κίνησης  $\Delta t = 5\text{s}$ .
- Δ.** Την τιμή της ταχύτητας του την χρονική στιγμή  $t = 2,4\text{s}$ .

7. Ένα αντικείμενο μπορεί να κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο και δέχεται μία δύναμη μέτρου  $F = 20\text{N}$ . Αν αρχικά η ταχύτητά του ήταν μηδέν, και η μάζα του είναι  $m = 10\text{kg}$ ,

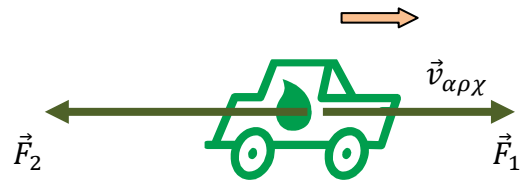
**A.** Τι είδους κίνηση εκτελεί; Εξηγήστε.

**B.** Υπολογίστε την τιμή της επιτάχυνσης που αποκτάει.

**Γ.** Σε πόσο χρόνο θα έχει αποκτήσει ταχύτητα  $u = 6\text{m/s}$ ;

**Δ.** Φτιάξτε την γραφική παράσταση της δύναμης που δέχεται και της ταχύτητας που αποκτάει σε συνάρτηση με τον χρόνο κίνησης.

8. Σε ένα όχημα μάζας  $m = 500\text{kg}$  ασκούνται δύο δυνάμεις αντίθετης κατεύθυνσης, όπως στο σχήμα. Τα μέτρα τους είναι  $F_1 = 400\text{N}$  και  $F_2 = 650\text{N}$ . Η



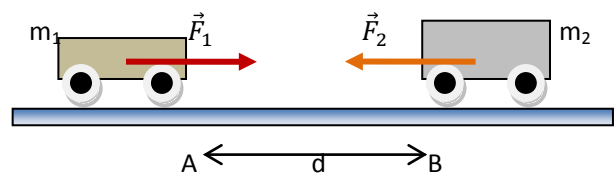
αρχική ταχύτητα του οχήματος την χρονική στιγμή  $t = 0$  έχει μέτρο  $u_{\alphaρχ} = 10\text{m/s}$  και την φορά της  $\vec{F}_1$ . Την χρονική στιγμή  $t = 0$  το όχημα βρισκόταν στην θέση  $x_0 = 0$ .

**A.** Να υπολογίσετε την επιτάχυνση (μέτρο και φορά) του οχήματος και να εξηγήσετε το είδος της κίνησης που εκτελεί.

**B.** Πόση ταχύτητα θα έχει αποκτήσει, και σε ποια θέση θα βρίσκεται την χρονική στιγμή  $t = 4\text{s}$ ;

**Γ.** Να φτιάξετε το διάγραμμα της ταχύτητας του οχήματος σε συνάρτηση με τον χρόνο.

9. Τα δύο αμαξάκια του σχήματος έλκονται μεταξύ τους με δυνάμεις αλληλεπίδρασης  $\vec{F}_1$  και  $\vec{F}_2$ . Αν η μάζες τους είναι  $m_1 = 4\text{kg}$  και  $m_2 = 8\text{kg}$  αντίστοιχα και το μέτρο της



αλληλεπίδρασης είναι  $12\text{ N}$ . Την χρονική στιγμή  $t = 0$  τα αφήνουμε ελεύθερα να κινηθούν, από απόσταση  $d = 2,25\text{m}$ . να υπολογίσετε:

**A.** Πόση είναι η επιτάχυνση που αποκτάει το ένα κάθε αμαξάκι;

**B.** Πότε συναντιούνται;

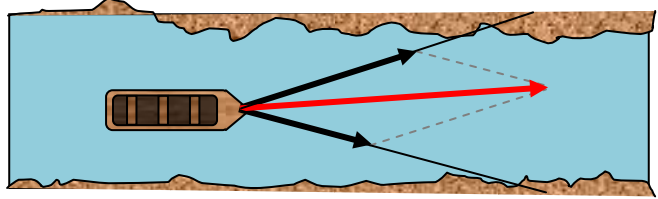
**Γ.** Σε πόση απόσταση από το σημείο A συναντιούνται;

**Δ.** Τι τιμές ταχύτητας έχουν την στιγμή της συνάντησης;

## Δυνάμεις σε δυο διαστάσεις

### 1. Η συνισταμένη δύναμη... Από πολλές δυνάμεις $\rightarrow$ μία.

- ✓ Μία βάρκα στο ποτάμι είναι δεμένη με δύο σχοινιά, από τη οποία την τραβούν δύο άνθρωποι. Η βάρκα δεν κινείται στην κατεύθυνση κανενός σχοινιού, αλλά στην κατεύθυνση της συνισταμένης δύναμης...



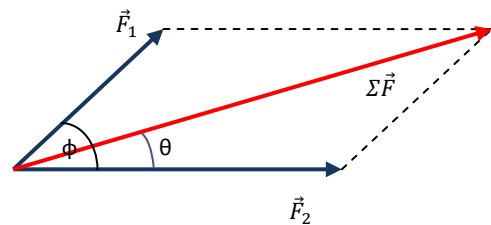
### 2. Υπολογισμός της συνισταμένης, στην περίπτωση που ασκούνται δύο δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ :

Για τον υπολογισμό του μέτρου της συνισταμένης δύναμης  $\Sigma F$  χρησιμοποιούμε τον κανόνα του παραλληλογράμμου:

$$\Sigma F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos\phi} \quad (1)$$

Για να υπολογίσουμε την διεύθυνση της:

$$\varepsilon\phi\theta = \frac{F_1 \cdot \eta\mu\phi}{F_2 + F_1 \cdot \cos\phi} \quad (2)$$

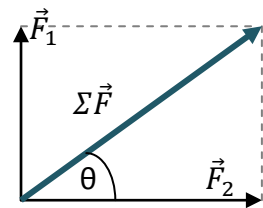


#### ➤ Ειδικές περιπτώσεις :

- ❖ Όταν η γωνία είναι  $\phi = 90^\circ$  (δυνάμεις κάθετες μεταξύ τους):

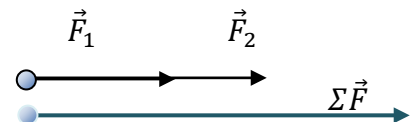
$$\Sigma F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} \quad (3)$$

$$\varepsilon\phi\theta = \frac{F_1}{F_2} \quad (4)$$



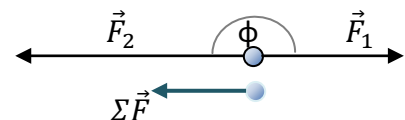
- ❖ Όταν η γωνία είναι  $\phi = 0^\circ$  (οι δυνάμεις ομόρροπες):

$$\Sigma F = F_1 + F_2 \quad (5)$$



- ❖ Όταν η γωνία είναι  $\phi = 180^\circ$  (αντίρροπες δυνάμεις):

$$\Sigma F = F_1 - F_2 \quad (6)$$



✓ Για  $F_1 = 30\text{N}$  και  $F_2 = 40\text{N}$ , έχουμε:

$$\phi = 90^\circ : \quad \Sigma F = \sqrt{30^2 + 40^2} = \sqrt{2500} = 50\text{N}$$

$$\varepsilon\phi\theta = \frac{30}{40} = 0,75, \text{ που είναι η εφαπτομένη των } 36,9^\circ.$$

$$\phi = 0^\circ : \quad \Sigma F = 30\text{N} + 40\text{N} = 70\text{N}$$

$$\phi = 180^\circ : \quad \Sigma F = 30\text{N} - 40\text{N} = -10\text{N}, \text{ δηλ. η } \vec{\Sigma F} \text{ έχει την φορά της } \vec{F}_2.$$

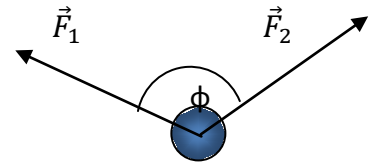
✓ Αν δύο δυνάμεις είναι αντίθετες ( $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ ) η συνισταμένη τους θα είναι μηδέν...

➤ Παρατηρήσεις

- ❖ Οι προηγούμενες εξισώσεις (3) – (6) μπορούν να προκύψουν και από τις (1) & (2) αν αντικαταστήσουμε σε αυτές τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των αντιστοίχων γωνιών. Π.χ.,  $\sin 90^\circ = 1$ ,  $\cos 90^\circ = 0$ .
- ❖ Η (3) προκύπτει και από την εφαρμογή του πυθαγόρειου θεωρήματος στο τρίγωνο που σχηματίζουν οι δυνάμεις  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  και  $\vec{\Sigma F}$ .

**Εφαρμογές - Ασκήσεις**

1. Στη σφαίρα του σχήματος ασκούνται δύο δυνάμεις ίσου μέτρου  $F_1 = F_2 = 5\text{N}$  οι οποίες σχηματίζουν γωνία  $\phi = 120^\circ$ .



**A.** Να υπολογίσετε την το μέτρο της συνισταμένης των δύο δυνάμεων.

**B.** Ποια είναι η διεύθυνσή της σε σχέση με την δύναμη  $\vec{F}_1$ ;

**Γ.** Να σχεδιάσετε μία τρίτη δύναμη  $\vec{F}_3$  έτσι ώστε οι τρεις δυνάμεις  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  και  $\vec{F}_3$  να ισορροπούν.

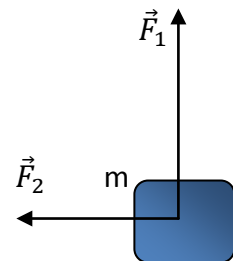
2. Δύο δυνάμεις με μέτρο  $F_1 = 4\sqrt{3}\text{ N}$  και  $F_2 = 4\text{N}$  ασκούνται σε ένα σώμα μάζας  $m = 2\text{kg}$  που αρχικά είναι ακίνητο.

**A.** Ποιο είναι το μέτρο της συνισταμένης των δύο δυνάμεων, αν σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία  $90^\circ$ ;

**B.** Ποια είναι η διεύθυνση (σε σχέση με την  $\vec{F}_2$ ) στην οποία θα κινηθεί το σώμα;

**Γ.** Πόση επιτάχυνση θα αποκτήσει;

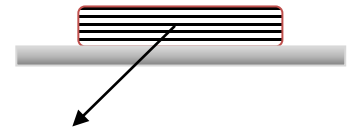
**Δ.** Αν η γωνία των δύο δυνάμεων ήταν  $30^\circ$ , η επιτάχυνση θα ήταν μικρότερη, μεγαλύτερη ή ίδια με την προηγούμενη τιμή;



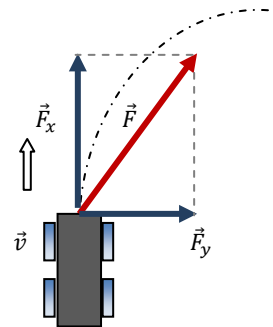
## 1. Ανάλυση δύναμης σε συνιστώσες. Από μία δύναμη $\rightarrow$ δύο δυνάμεις...

Συχνά, όταν μία δύναμη ασκείται στο αντικείμενο, προκαλεί παραπάνω από ένα αποτελέσματα. Τότε, αναλύουμε την δύναμη σε συνιστώσες (την ... χωρίζουμε σε «μέρη») κάθε μία από τις οποίες είναι υπεύθυνη για μία συγκεκριμένη ενέργεια:

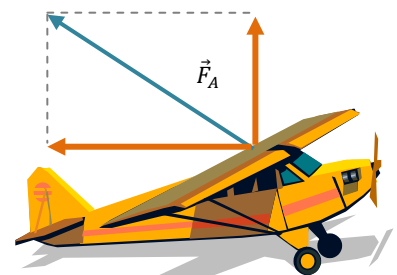
- ✓ Σπρώχνουμε το βιβλίο πάνω στο τραπέζι... Η δύναμη που ασκούμε το μετακινεί προς τα μπροστά, πιέζοντάς το ταυτόχρονα προς τα κάτω.



- ✓ Ενώ το αμαξάκι κινείται προς τα μπροστά, του ασκούμε μία δύναμη διαγώνια σε σχέση με την ταχύτητα. Ένα μέρος της δύναμης (...συνιστώσα) αυξάνει το μέτρο της ταχύτητας του ενώ ταυτόχρονα ένα άλλο μέρος (...μια άλλη συνιστώσα) της δύναμης στρίβει το αμαξάκι.



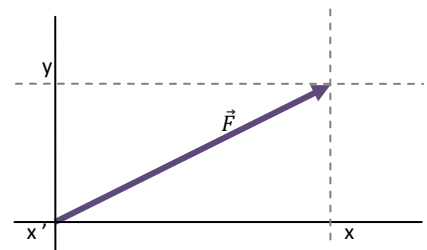
- ✓ Το αεροπλάνο τροχοδρομεί στον διάδρομο απογείωσης. Μία κατακόρυφη συνιστώσα της αντίστασης του αέρα στα φτερά του, εξουδετερώνει το βάρος και απογειώνει το αεροπλάνο.



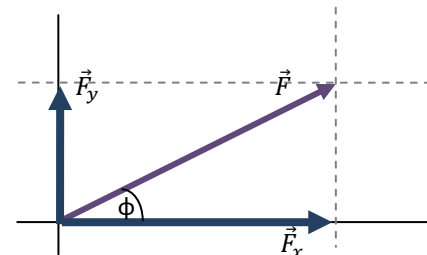
## 2. Υπολογισμός των συνιστωσών (σε κάθετες διευθύνσεις μεταξύ τους).

Ο Σχεδίαση:

Από το άκρο του διανύσματος της δύναμης που θέλουμε να αναλύσουμε, φέρνουμε δύο κάθετες στις διευθύνσεις (άξονες) όπου θα υπολογίσουμε τις συνιστώσες.



Τα σημεία στα οποία συναντάμε τους άξονες είναι τα άκρα των διανυσμάτων των συνιστωσών.





ο *Μέτρο*:

Με δεδομένη την γωνία  $\phi$  που σχηματίζει η δύναμη  $\vec{F}$  με έναν από τους δύο άξονες, χρησιμοποιούμε το  $\eta\mu\phi$  για να υπολογίσουμε την απέναντι (στην γωνία) συνιστώσα και το  $\sigma\upsilon\nu\phi$  για να υπολογίσουμε την προσκείμενη (στην γωνία) συνιστώσα:

$$F_x = F \cdot \sigma\upsilon\nu\phi$$

$$F_y = F \cdot \eta\mu\phi$$

- ✓ Αν η δύναμη του σχήματος έχει μέτρο  $F = 50\text{N}$  και η γωνία είναι  $\phi = 30^\circ$  ( $\eta\mu 30 = 1/2$  και  $\sigma\upsilon\nu 30^\circ = \sqrt{3}/2$ ).

$$F_x = 50 \cdot \frac{1}{2} = 25\text{N} \quad \& \quad F_y = 50 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3}\text{N}$$

➤ Παρατήρηση

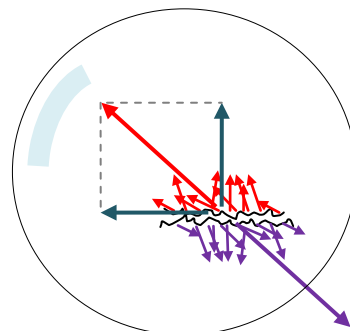
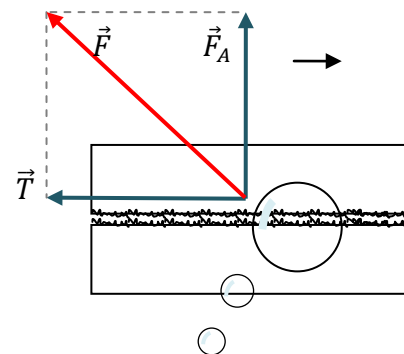
Οι δύο συνιστώσες αντικαθιστούν την αρχική δύναμη καθώς συνολικά προκαλούν το ίδιο αποτέλεσμα με αυτήν.

### 3. Η τριβή: Μια «διάσημη» συνιστώσα!

Όταν δύο επιφάνειες εφάπτονται, ασκούν μεταξύ τους δυνάμεις της μορφής «δράση – αντίδραση».

Αν οι επιφάνειες δεν είναι λείες και η μία κινείται, ή τείνει να κινηθεί σε σχέση με την άλλη, εμφανίζονται δυνάμεις αλληλεπίδρασης (λόγω των μικρών ανωμαλιών που υπάρχουν ανάμεσα τους) και εμποδίζουν την κίνηση. Η συνιστώσα αυτών των δυνάμεων που είναι παράλληλη στις επιφάνειες είναι η **τριβή**, ενώ την συνιστώσα κάθετα στις επιφάνειες συνηθίζουμε να την λέμε **κάθετη αντίδραση**.

- Την τριβή που εμφανίζεται πριν αρχίσει η κίνηση την ονομάζουμε **στατική τριβή**. Δεν είναι σταθερή, αλλά είναι συνεχώς αντίθετη με την δύναμη που προσπαθεί να κινήσει το σώμα.
- Όταν το σώμα αρχίζει να «ολισθαίνει» (δηλ., να γλιστράει...) η τριβή που εμφανίζεται είναι πια σταθερή και ονομάζεται **τριβή ολίσθησης**.



Η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει η στατική τριβή (**οριακή τριβή**) υπολογίζεται από την σχέση:

$$T_{op} = \mu_{op} \cdot F_A \quad (8)$$

Αντίστοιχα υπολογίζεται και η τριβή ολίσθησης:

$$T = \mu_{ολ} \cdot F_A \quad (9)$$

Στις προηγούμενες εξισώσεις, (8 & 9) η σταθερά  $\mu$  λέγεται **συντελεστής τριβής** (οριακής και ολίσθησης αντίστοιχα), και είναι ένας αριθμός που εξαρτάται από το είδος των επιφανειών που τρίβονται.

➤ Παρατηρήσεις:

- ❖ Η τριβή ολίσθησης δεν εξαρτάται από την ταχύτητα με την οποία κινείται το ένα σώμα σε σχέση με το άλλο, ούτε και από το μέγεθος των επιφανειών. Όμως εξαρτάται από το είδος τους (υλικό, πόσο τραχιές είναι ...) καθώς και την κάθετη δύναμη ανάμεσα τους.
- ❖ Η τριβή δεν εξαρτάται άμεσα από το βάρος του σώματος. Απλώς η κάθετη αντίδραση  $\vec{F}_A$  είναι συχνά ίση με αυτό. Έτσι, όταν το βάρος είναι μεγάλο και ίσο με την  $\vec{F}_A$ , η τριβή είναι επίσης μεγάλη.
- ❖ Η τριβή έχει φορά πάντοτε αντίθετη από αυτήν της σχετικής κίνησης των επιφανειών που εφάπτονται.
- ❖ Συνήθως θεωρούμε ότι ο συντελεστής τριβής ολίσθησης είναι ίσος με αυτόν της οριακής τριβής. Στην πραγματικότητα ο συντελεστής οριακής τριβής είναι λίγο μεγαλύτερος.

✓ **Παραδείγματα.**

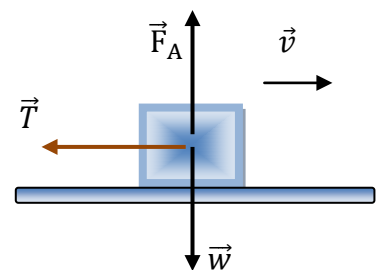
1. Ένα σώμα βάρους  $w = 10\text{N}$  κινείται σε οριζόντιο επίπεδο, χωρίς την επίδραση κάποιας άλλης οριζόντιας δύναμης εκτός από την τριβή. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης ανάμεσα στο σώμα και το επίπεδο είναι  $\mu = 0,3$ .

ο Η κάθετη αντίδραση είναι:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_A = w = 10\text{N}.$$

(Στην κατακόρυφη διεύθυνση το σώμα ισορροπεί καθώς ούτε πετάει, ούτε αναπηδάει!)

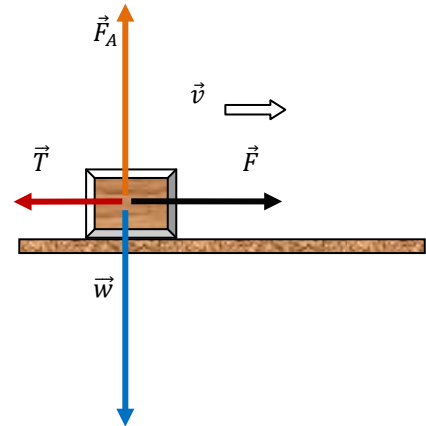
ο Έτσι η τριβή που εμφανίζει κατά την διάρκεια της κίνησής του είναι:



$$T = \mu \cdot F_A = 3N.$$

- ο Η δύναμη αυτή αντιστέκεται στην κίνησή του και το υποχρεώνει να κάνει ευθ. ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση.

2. Το αντικείμενο του σχήματος δέχεται μία οριζόντια δύναμη μέτρου  $F = 15N$  και ολισθαίνει πάνω στο οριζόντιο επίπεδο. Η μάζα του είναι  $m = 5kg$  και ο συντελεστής τριβής ολίσθησης ανάμεσα σε αυτό και στο επίπεδο είναι  $\mu = 0,25$ . Η αρχική του ταχύτητα είναι  $v_{αρχ} = 4m/s$ .



- ο Η κάθετη αντίδραση υπολογίζεται από τις δυνάμεις στον άξονα γ'γ (κάθετα στην κίνηση).

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_A = m \cdot g = 50N$$

- ο Η τριβή που εμφανίζεται είναι:

$$T = \mu \cdot F_A = 12,5 N$$

- ο Η συνισταμένη δύναμη στην διεύθυνση της κίνησης είναι:

$$\Sigma F_x = F - T = 2,5 N$$

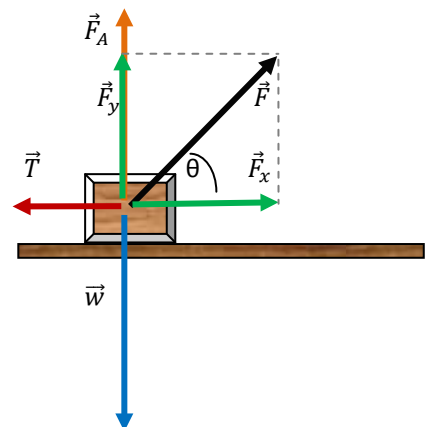
- ο Λόγω της δύναμης στην διεύθυνση x'x, το σώμα επιταχύνεται:

$$a = \frac{\Sigma F_x}{m} = 0,5 \frac{m}{s^2}$$

- ο Η ταχύτητα που θα έχει αποκτήσει μετά από 6 sec, θα είναι:

$$v = v_{αρχ} + a \cdot \Delta t = 7m/s$$

3. Στο κιβώτιο του σχήματος, ασκούμε την δύναμη  $\vec{F}$  σε γωνία  $\theta = 45^\circ$  ως προς το οριζόντιο επίπεδο. Η δύναμη έχει μέτρο  $F = 20\sqrt{2} N$ , το κιβώτιο μάζα  $m = 6kg$  και ο συντελεστής τριβής (ολίσθησης και οριακός) που εμφανίζει με το έδαφος είναι  $\mu = 0,3$ . Η αρχική ταχύτητα του κιβωτίου είναι μηδέν.



- ο Αρχικά αναλύουμε την  $\vec{F}$  σε διευθύνσεις παράλληλα και κάθετα στην κίνηση:

$$F_x = F \cdot \sin 45^\circ = 20N$$

$$F_y = F \cdot \cos 45^\circ = 20N$$

- ο Θέλουμε να εξετάσουμε αν η δύναμη  $\vec{F}_x$  αρκετή για να κινήσει το κιβώτιο. Έτσι πρέπει να υπολογίσουμε και την τριβή και να τις συγκρίνουμε.

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_y + F_A - mg = 0 \Rightarrow F_A = mg - F_y = 40N$$

Άρα η οριακή τριβή είναι:

$$T_{op} = T_{ολ} = \mu \cdot F_A = 12N$$

Έτσι, επειδή  $F_x > T_{op}$ , το κουτί θα αρχίσει να κινείται.

Ο Η επιτάχυνση που θα αποκτήσει είναι :

$$\alpha = \frac{\Sigma F_x}{m} = \frac{F_x - T_{ολ}}{m} = \frac{4}{3} m/s^2$$

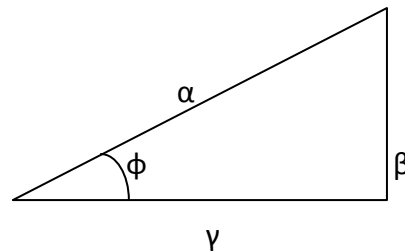
### Τριγωνομετρικές Γνώσεις

$$\eta\mu\varphi = \frac{\beta}{\alpha}$$

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{\gamma}{\alpha}$$

$$\epsilon\varphi\varphi = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\eta\mu\varphi}{\sigma\upsilon\nu\varphi}$$

$$\eta\mu^2\varphi + \sigma\upsilon\nu^2\varphi = 1$$

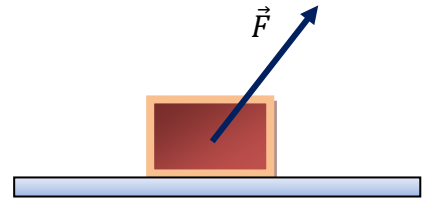


|             |   | $\phi$               | $\eta\mu\phi$ | $\sigma\upsilon\nu\phi$ | $\epsilon\phi\phi$ |
|-------------|---|----------------------|---------------|-------------------------|--------------------|
| $0^\circ$   | ή | $0 \text{ rad}$      | 0             | 1                       | 0                  |
| $30^\circ$  | ή | $\pi/6 \text{ rad}$  | $1/2$         | $\sqrt{3}/2$            | $\sqrt{3}/3$       |
| $45^\circ$  | ή | $\pi/4 \text{ rad}$  | $\sqrt{2}/2$  | $\sqrt{2}/2$            | 1                  |
| $60^\circ$  | ή | $\pi/3 \text{ rad}$  | $\sqrt{3}/2$  | $1/2$                   | $\sqrt{3}$         |
| $90^\circ$  | ή | $\pi/2 \text{ rad}$  | 1             | 0                       | -                  |
| $120^\circ$ | ή | $2\pi/3 \text{ rad}$ | $\sqrt{3}/2$  | $-1/2$                  | $-\sqrt{3}$        |
| $180^\circ$ | ή | $\pi \text{ rad}$    | 0             | -1                      | 0                  |

**Εφαρμογές – Ασκήσεις**

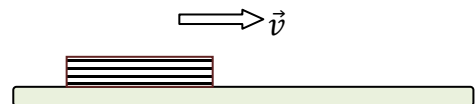
Σε όλες τις επόμενες, θεωρείστε ότι  $g = 10\text{m/s}^2$

1. Ασκούμε μία δύναμη μέτρου  $F = 30\text{N}$  στο κιβώτιο του διπλανού σχήματος το οποίο βρίσκεται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Η δύναμη ασκείται με γωνία  $\theta = 60^\circ$  ως προς το οριζόντιο επίπεδο. Αν η μάζα του κιβωτίου είναι  $m = 5\text{kg}$ :



- A.** Υπολογίστε την τιμή της δύναμης που ασκεί το οριζόντιο επίπεδο στο κιβώτιο.
- B.** Πόση επιτάχυνση αποκτάει;
- Γ.** Φτιάξτε το διάγραμμα της ταχύτητάς του σε συνάρτηση με τον χρόνο.
- Δ.** Αν θέλαμε να το συγκρατήσουμε ακίνητο, πόση δύναμη θα έπρεπε να του ασκήσουμε σε οριζόντια διεύθυνση;

2. Πετάμε το βιβλίο της φυσικής οριζόντια στο θρανίο με αρχική ταχύτητα  $1\text{m/s}$ . Η μάζα του βιβλίου είναι  $m = 250\text{g}$ . Αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης ανάμεσα στο θρανίο και το βιβλίο είναι  $\mu = 0,2$ :



- A.** Σχεδιάστε όλες τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα και υπολογίστε το μέτρο της κάθετης αντίδρασης που ασκεί το θρανίο στο βιβλίο.
- B.** Πόση είναι η δύναμη της τριβής που εμφανίζεται;
- Γ.** Ασκείται δύναμη τριβής στο θρανίο; Αν ναι, πόση;
- Δ.** Υπολογίστε το μέτρο της επιτάχυνσης που αποκτάει το βιβλίο. Τι είδους κίνηση εκτελεί;
- Ε.** Υπολογίστε τον χρόνο που χρειάζεται μέχρι να σταματήσει.

3. Στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο σπρώχνουμε δύο σώματα με μάζες  $m_1 = 2\text{kg}$  και  $m_2 = 4\text{kg}$ , ώστε να αποκτήσουν την ίδια αρχική ταχύτητα και μετά τα αφήνουμε ελεύθερα να κινηθούν μέχρι να σταματήσουν λόγω της τριβής. Ο συντελεστής τριβής ανάμεσα στα σώματα και το επίπεδο είναι  $\mu = 0,4$ .

- A.** Πόση τριβή δέχεται το κάθε σώμα;
- B.** Ποιο από τα δύο πιστεύετε ότι θα έχει μεγαλύτερη επιτάχυνση;

Γ. Υπολογίστε την επιτάχυνση του κάθε ενός.

Δ. Σχολιάστε την απάντησή σας στην ερώτηση Β., σε σχέση με αυτό που υπολογίσατε στην ερώτηση Γ.

4. Σε ένα οριζόντιο επίπεδο βρίσκονται δύο κουτιά από ίδιο υλικό, αρχικά ακίνητα, το ένα δίπλα στο άλλο. Την χρονική στιγμή  $t = 0$  ασκούμε στο κάθε ένα από αυτά από μία δύναμη οριζόντιας διεύθυνσης και μέτρου  $F = 16\text{N}$ . Οι μάζες τους είναι  $m_1 = 4\text{kg}$  και  $m_2 = 2\text{kg}$  ενώ ο συντελεστής τριβής ολίσθησης που εμφανίζουν με το οριζόντιο επίπεδο είναι  $\mu = 0,3$ .

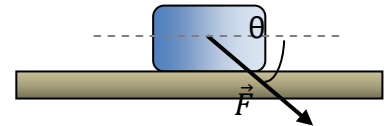
Α. Πόση τριβή δέχεται το κάθε ένα κουτί;

Β. Υπολογίστε τις επιταχύνσεις τους.

Γ. Πόσο θα απέχουν την χρονική στιγμή  $t = 3\text{s}$ ;

Δ. Φτιάξτε το διάγραμμα θέσης χρόνου για το κάθε σώμα, στο ίδιο σύστημα αξόνων.

5. Στο σώμα του σχήματος ασκούμε μία δύναμη μέτρου  $F = 10\sqrt{2}\text{ N}$  σε γωνία  $\theta = 45^\circ$  ως προς το οριζόντιο επίπεδο. Ο συντελεστής τριβής που εμφανίζεται ανάμεσα στο σώμα και το επίπεδο είναι  $\mu = 0,25$  και η μάζα του σώματος  $m = 3\text{kg}$ .

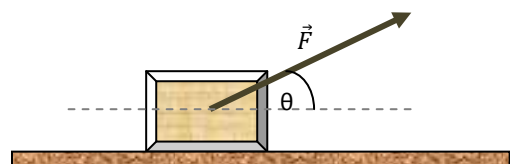


Α. Πόση είναι η κάθετη αντίδραση που ασκεί το δάπεδο στο σώμα;

Β. Υπολογίστε την τριβή που εμφανίζεται.

Γ. Θα κινηθεί το σώμα; Εξηγείστε την απάντησή σας.

6. Δένουμε ένα βαρύ κιβώτιο με ένα σχοινί και το τραβάμε όπως φαίνεται στο σχήμα. Η δύναμη που ασκούμε είναι  $200\sqrt{3}\text{N}$  και το κιβώτιο έχει μάζα  $m = 30\text{kg}$ . Η γωνία που σχηματίζει η δύναμη με το οριζόντιο επίπεδο είναι  $30^\circ$ . Το κιβώτιο αποκτά επιτάχυνση  $a = 1\text{m/s}^2$ .



Α. Πόση είναι η συνισταμένη δύναμη που επιταχύνει το κιβώτιο;

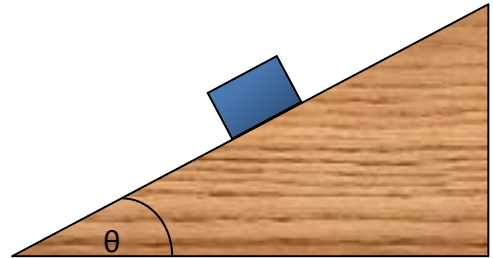
Β. Ποιο είναι το μέτρο της τριβής που δέχεται το κιβώτιο;

Γ. Υπολογίστε τον συντελεστή τριβής ολίσθησης ανάμεσα στο κιβώτιο και το δάπεδο.

Δ. Πόση θα ήταν η τριβή αν ασκούσαμε την δύναμη σε οριζόντια διεύθυνση;

7. Πάνω σε ένα κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης  $\theta = 30^\circ$ , γλιστρά κατεβαίνοντας με σταθερή ταχύτητα ένα αντικείμενο μάζας  $m$ . Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης που εμφανίζεται είναι  $\mu$ .

Α. Σχεδιάστε τις δυνάμεις που δέχεται το αντικείμενο και αναλύστε το βάρος σε συνιστώσες παράλληλα και κάθετα στο επίπεδο.



Β. Πόση είναι η συνισταμένη δύναμη που δέχεται σε κάθε μία από τις δύο προηγούμενες διευθύνσεις;

Γ. Γράψτε την εξίσωση υπολογισμού της τριβής, σε συνάρτηση με την μάζα του σώματος.

Δ. Με την βοήθεια των προηγούμενων εξισώσεων, υπολογίστε τον συντελεστή τριβής ανάμεσα στο σώμα και το επίπεδο.

## Κινήσεις με την επίδραση του βάρους

### 1. Ένα αντικείμενο αφήνεται να πέσει ... στο κενό...

Αν σε ένα σώμα ασκείται **μόνο** το βάρος του, και το αφήσουμε να πέσει, εκτελεί ευθ. ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, χωρίς αρχική ταχύτητα. Η κίνηση λέγεται και **ελεύθερη πτώση**.

Η επιτάχυνση που αποκτάει είναι:

$$\alpha = \frac{\Sigma F}{m} = \frac{w}{m} = \frac{m \cdot g}{m} \Rightarrow \alpha = g$$

### 2. Οι εξισώσεις της κίνησης (ελεύθερης πτώσης):

Η ταχύτητα που αποκτάει μετά από χρόνο πτώσης  $\Delta t$ , είναι :

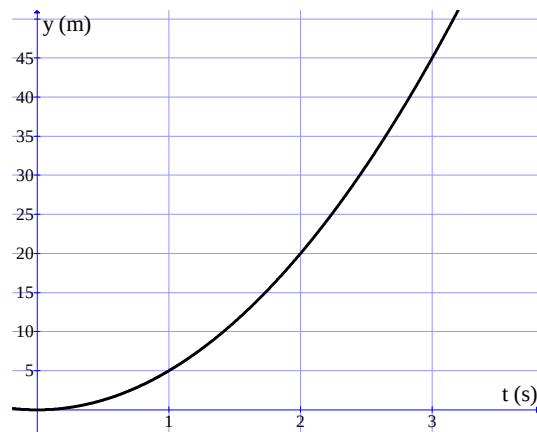
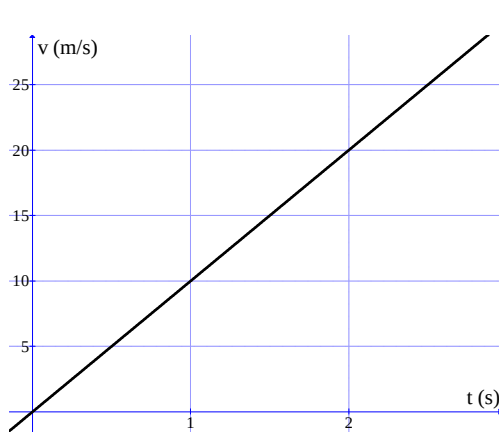
$$v = g \cdot \Delta t$$

Η απόσταση  $y$  που διανύει πέφτοντας:

$$y = \frac{1}{2} g \cdot \Delta t^2$$

### 3. Τα διαγράμματα της κίνησης:

Θεωρώντας θετική φορά προς τα κάτω...



#### ➤ Παρατήρηση:

Η αντίσταση του αέρα κοντά στην γη δεν είναι μηδέν. Όμως, όταν είναι πολύ μικρότερη από το βάρος του σώματος, μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα, και τότε η κίνηση του σώματος προσεγγίζει πολύ την ελεύθερη πτώση.



#### 4. Αν πετάξω ένα σώμα κατακόρυφα προς τα πάνω ή προς τα κάτω;

Η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη με αρχική ταχύτητα και επιτάχυνση  $\vec{g}$ . (κατακόρυφη βολή).

Αν η αρχική ταχύτητα  $\vec{v}_{αρχ}$  είναι προς τα κάτω (δηλ. είναι ομόρροπη της  $\vec{g}$ ), η κίνηση είναι ευθ. ομαλά επιταχυνόμενη, ενώ αν η  $\vec{v}_{αρχ}$  είναι προς τα πάνω, (αντίρροπη της  $\vec{g}$ ), η κίνηση ξεκινάει ως ευθ. ομαλά επιβραδυνόμενη.

#### 5. Οι εξισώσεις της κατακόρυφης βολής:

Κατακόρυφη βολή προς τα κάτω:

$$v = v_{αρχ} + g \cdot \Delta t$$

$$y = v_{αρχ} \cdot \Delta t + \frac{1}{2} g \cdot \Delta t^2$$

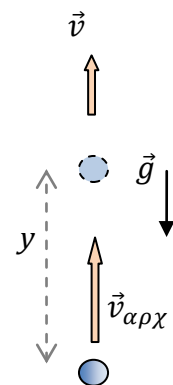
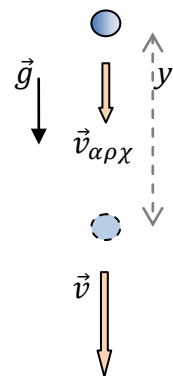
Κατακόρυφη βολή προς τα πάνω:

$$v = v_{αρχ} - g \cdot \Delta t$$

$$y = v_{αρχ} \cdot \Delta t - \frac{1}{2} g \cdot \Delta t^2$$

##### ➤ Παρατήρηση

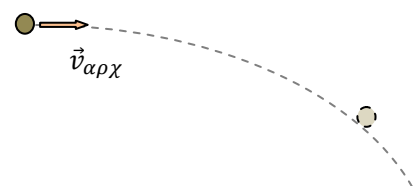
Όπου  $v, y$  οι αλγεβρικές τιμές της στιγμιαίας ταχύτητας και της θέσης του σώματος (σε σχέση με το σημείο βολής). Άρα, τα μεγέθη αυτά μπορούν να έχουν θετική ή αρνητική τιμή, ανάλογα με το πως κινείται το σώμα και την θέση που βρίσκεται.



#### 6. Αν η βολή γίνει οριζόντια;

Σε αυτήν την περίπτωση, το αντικείμενο κάνει ταυτόχρονα δύο κινήσεις:

- Κατακόρυφα πέφτει με την επιτάχυνση της βαρύτητας (ελεύθερη πτώση)



- Οριζόντια δεν δέχεται καμία δύναμη άρα κινείται με σταθερή ταχύτητα, αυτήν που είχε αρχικά όταν το πετάξαμε...

### 7. Οι εξισώσεις των δύο επιμέρους κινήσεων:

Στην οριζόντια διεύθυνση, όπου δεν ασκείται καμία δύναμη, η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλή.

$$x = v_{\alpha\rho\chi} \cdot \Delta t$$

Στην κατακόρυφη διεύθυνση, όπου ασκείται μόνο το βάρος, ενώ στην διεύθυνση αυτή δεν υπάρχει αρχική ταχύτητα (... ελεύθερη πτώση).

$$v_y = g \cdot \Delta t$$

Η απόσταση  $y$  που διανύει πέφτοντας:

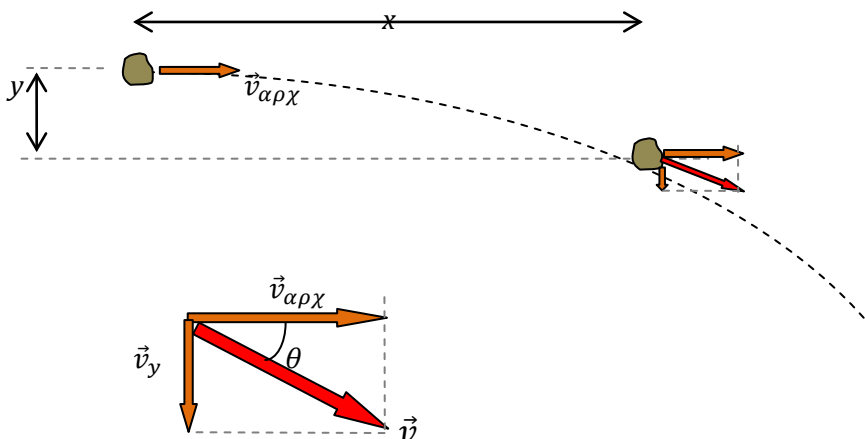
$$y = \frac{1}{2} g \cdot \Delta t^2$$

### 8. Η ταχύτητα του αντικειμένου ...

... είναι το διανυσματικό άθροισμα των  $\vec{v}_x (= \vec{v}_{\alpha\rho\chi})$  και  $\vec{v}_y$ :

$$v = \sqrt{v_{\alpha\rho\chi}^2 + v_y^2}$$

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{v_y}{v_{\alpha\rho\chi}}$$



## ✓ Παραδείγματα

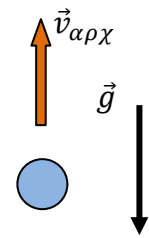
1. Πετάμε ένα σώμα κατακόρυφα προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα  $v_{αρχ} = 20\text{m/s}$ .

Μετά από χρόνο  $\Delta t = 1\text{s}$ , η ταχύτητά του θα είναι :

$$v = v_{αρχ} - g \cdot \Delta t = 10\text{m/s}$$

Η κατακόρυφη μετατόπισή του θα είναι:

$$y = v_{αρχ} \cdot \Delta t - \frac{1}{2} g \cdot \Delta t^2 = 15\text{m}$$



2. Το προηγούμενο αντικείμενο, μετά από χρόνο  $\Delta t = 2\text{s}$ , θα έχει ταχύτητα:

$$v = v_{αρχ} - g \cdot \Delta t = 0$$

Η κατακόρυφη μετατόπιση του θα είναι:

$$y = v_{αρχ} \cdot \Delta t - \frac{1}{2} g \cdot \Delta t^2 = 20\text{m}$$

Στην θέση αυτή το αντικείμενο σταματάει στιγμιαία, πριν αρχίσει να ξαναπέφτει. Έτσι, τα 20m, είναι και το μέγιστο ύψος στο οποίο φτάνει.

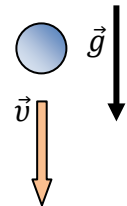
3. Σε μια επόμενη χρονική στιγμή, π.χ., για  $\Delta t = 4\text{s}$ :

$$v = v_{αρχ} - g \cdot \Delta t = -20\text{m/s}$$

$$y = v_{αρχ} \cdot \Delta t - \frac{1}{2} g \cdot \Delta t^2 = 0.$$

Το αρνητικό πρόσημο της ταχύτητας δείχνει ότι το αντικείμενο κινείται σε κατεύθυνση αντίθετη από εκείνη της αρχικής ταχύτητας, άρα προς τα κάτω. Έτσι, αφού και η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι προς τα κάτω η κίνηση έχει γίνει επιταχυνόμενη!

Η μετατόπιση έγινε μηδέν, άρα επέστρεψε στο σημείο από όπου το είχαμε πετάξει...

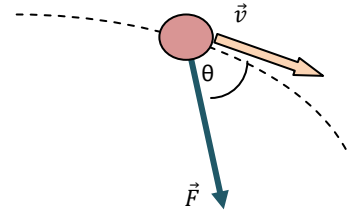


## Κυκλική Κίνηση

### 1. Όταν η δύναμη σχηματίζει γωνία με την ταχύτητα...

Η επιτάχυνση αλλάζει τουλάχιστον την διεύθυνση της ταχύτητας και η κίνηση είναι καμπυλόγραμμη...

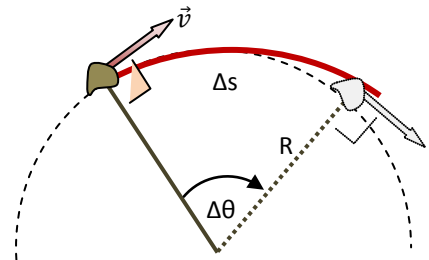
- ✓ Η κίνηση που κάνει μία πέτρα δεμένη σε ένα σχοινί...
- ✓ Η κίνηση που κάνει ένα σώμα όταν το πετάμε οριζόντια...
- ✓ Η κίνηση που θα κάνει ένα εργαστηριακό αμαξάκι αν την ώρα που κινείται το σπρώξουμε από το πλάι...



### 2. Αν η δύναμη παραμένει συνεχώς κάθετη στην ταχύτητα...

Τότε αλλάζει μόνο η διεύθυνση της κίνησης ενώ το **μέτρο της ταχύτητας** παραμένει **σταθερό**. Έτσι, το σώμα σε ίσες χρονικές διάρκειες διανύει ίσα διαστήματα  $\Delta s$  (...τόξα).

- ✓ Π.χ., αν το μέτρο της ταχύτητας με την οποία περιστρέφεται ένα αντικείμενο είναι 2m/s, κάθε δευτερόλεπτο θα διανύει τόσο μήκος 2m.



Η τροχιά που διαγράφει το αντικείμενο είναι κυκλική. Η κίνηση ονομάζεται **ομαλή κυκλική**.

- Ο χρόνος που χρειάζεται για να εκτελέσει μία πλήρη περιστροφή, είναι πάντα ο ίδιος, και ονομάζεται **περίοδος** της κίνησης,  $T$ .
- Ο αριθμός των περιστροφών που κάνει το αντικείμενο ανά δευτερόλεπτο, λέγεται **συχνότητα** της κίνησης,  $f$ .
- Αν σε χρόνο  $\Delta t$  κάνει  $N$  περιστροφές, ισχύει ότι:

$$f = \frac{N}{\Delta t}$$

- Τα δύο μεγέθη συνδέονται με την σχέση:

$$f = \frac{1}{T}$$

Δηλαδή, αν οι περιστροφές που έχει ολοκληρώσει το σώμα είναι  $N = 1$ , ο χρόνος που θα έχει χρειαστεί θα είναι μία περίοδος,  $\Delta t = T$

- Μονάδα περιόδου είναι το sec, μονάδα συχνότητας το Hz (Herz = 1στροφή/sec)

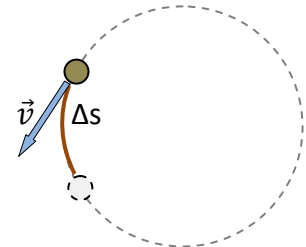
- ✓ Ένα αντικείμενο εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση και σε χρόνο  $\Delta t = 4\text{sec}$ , περιστρέφεται  $N = 28$  φορές. Η συχνότητά του είναι  $f = \frac{N}{\Delta t} = \frac{28}{4} = 7\text{Hz}$ . Η περίοδος της κίνησής του είναι  $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{7}\text{sec}$

### 3. Οι ταχύτητες στην κυκλική κίνηση.

Η ταχύτητα με την οποία διαγράφει το τόξο του κύκλου είναι η **γραμμική ταχύτητα**  $\vec{v}$ . Το μέτρο της υπολογίζεται:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

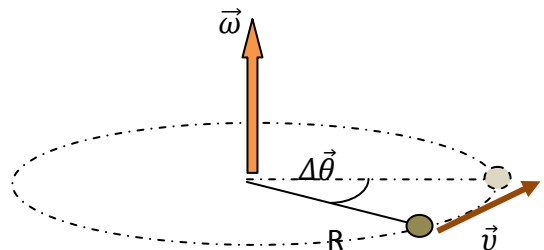
- Το διάνυσμα της γραμμικής ταχύτητας είναι συνεχώς εφαπτόμενο στην κυκλική τροχιά.



Καθώς το αντικείμενο περιστρέφεται, η ακτίνα της τροχιάς του διαγράφει μία γωνία  $\Delta\theta$ . Το «πόσο γρήγορα» διαγράφεται αυτή η γωνία μας το δείχνει η **γωνιακή ταχύτητα**  $\vec{\omega}$ . Το μέτρο της υπολογίζεται:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

- Το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας είναι συνεχώς κάθετο στο επίπεδο της τροχιάς.

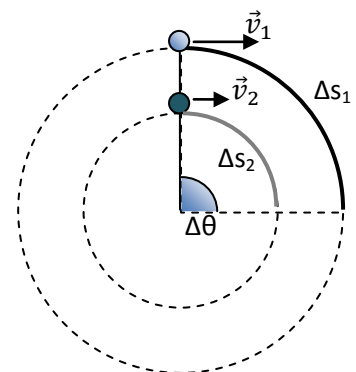


Τα μέτρα των δύο ταχυτήτων συνδέονται με την εξίσωση:

$$v = \omega \cdot R$$

όπου  $R$  είναι η ακτίνα της τροχιάς.

- Ενώ η γωνία που διαγράφει το σώμα καθώς περιστρέφεται είναι ανεξάρτητη της ακτίνας της τροχιάς του, το τόξο που διανύει είναι τόσο μεγαλύτερο όσο μεγαλύτερη είναι η ακτίνα. Έτσι, η ταχύτητα με την οποία μετακινείται πάνω στην κυκλική του τροχιά, (...γραμμική ταχύτητα) είναι τόσο μεγαλύτερη όσο είναι η ακτίνα της τροχιάς.



- ✓ Οι δύο σφαίρες στο διπλανό σχήμα διαγράφουν και οι δύο γωνία  $\Delta\theta = \pi/2 \text{ rad}$ , σε χρόνο  $\Delta t = 3\text{s}$ . Έτσι η γωνιακή τους ταχύτητα είναι:  $\omega_1 = \omega_2 = \omega = \Delta\theta/\Delta t = \pi/6 \text{ r/s}$ .
- ✓ Για τις γραμμικές ταχύτητες, αν  $R_1 = 3\text{m}$  και  $R_2 = 2\text{m}$ , ισχύει:

$$v_1 = \omega \cdot R_1 = \pi/2 \text{ m/s} \quad \& \quad v_2 = \omega \cdot R_2 = \pi/3 \text{ m/s}$$

➤ Παρατηρήσεις

- ❖ Από την γεωμετρία γνωρίζουμε ότι ένα τόξο και η αντίστοιχη του επίκεντρη γωνία συνδέονται με την εξίσωση:

$$\Delta s = R \cdot \Delta \theta$$

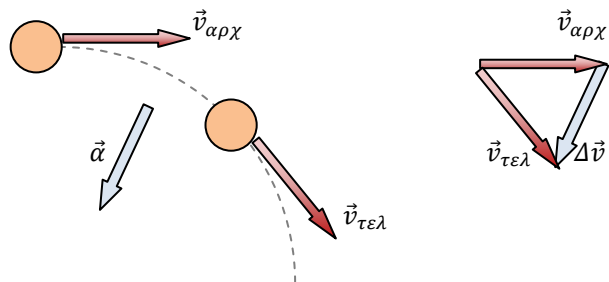
Από την εξίσωση αυτή, αν διαιρέσουμε με τον χρόνο προκύπτει η σχέση  $v = \omega \cdot R$ .

- ❖ Σαν μονάδα μέτρησης της γωνίας χρησιμοποιούμε το ακτίνιο (rad). Ισχύει ότι ακτίνια αντιστοιχούν σε γωνία  $180^\circ$  (π.χ.,  $2\pi \text{ rad} \rightarrow 360^\circ$ ,  $\pi/2 \text{ rad} \rightarrow 90^\circ$  κ.λ.π.)
- ❖ Όταν θέλουμε να υπολογίσουμε μήκος τόξου, αντικαθιστούμε όπου την  $\pi = 3,14$ . Π.χ., το μήκος της περιφέρειας ενός κύκλου ακτίνας  $R=2\text{m}$  είναι:  
 $s = 2\pi \cdot R = 2 \cdot 3,14 \cdot 2 = 12,56\text{m}$ .

#### 4. Ένα σώμα κάνει ομαλή κυκλική κίνηση. Έχει επιτάχυνση;

Η διεύθυνση της γραμμικής ταχύτητας αλλάζει συνεχώς, άρα υπάρχει επιτάχυνση που σχετίζεται με την αλλαγή της διεύθυνσης της ταχύτητας.

Η επιτάχυνση αυτή, έχει κατεύθυνση προς το κέντρο της τροχιάς και ονομάζεται **κεντρομόλος**,  $\vec{a}_κ$ .



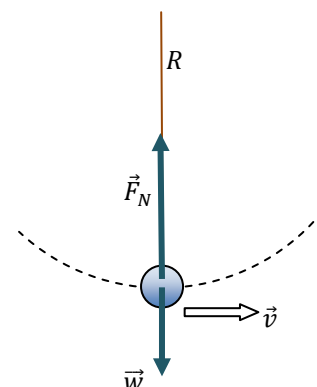
- Το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης υπολογίζεται από την εξίσωση και είναι σταθερό:

$$a_κ = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$

#### 5. Ποια δύναμη ασκείται στο σώμα που κάνει ομαλή κυκλική κίνηση;

Για να «στρίψει» το σώμα πρέπει να δέχεται δύναμη (η δυνάμεις) κάθετα στην ταχύτητα του δηλ. στην διεύθυνση της ακτίνας της τροχιάς του. Η συνισταμένη όλων των δυνάμεων στην διεύθυνση της ακτίνας λέγεται **κεντρομόλος δύναμη**,  $F_κ$  ( ... =  $\Sigma F_r$ ) και είναι αυτή που προκαλεί την κεντρομόλο επιτάχυνση:

$$F_κ = \Sigma F_r = m \cdot a_κ$$



- ✓ Ένα σώμα μάζας  $m = 2\text{kg}$ , περιστρέφεται σε κυκλική τροχιά ακτίνας  $R = 4\text{m}$  με ταχύτητα σταθερού μέτρου  $v = 2\text{m/s}$ . Η κεντρομόλος επιτάχυνση που δέχεται έχει μέτρο:

$$a_k = v^2/R = 4/4 \text{ m/s}^2 = 1\text{m/s}^2.$$

- ✓ Η συνισταμένη των δυνάμεων που δέχεται το προηγούμενο αντικείμενο είναι στην διεύθυνση της ακτίνας (κεντρομόλος) και έχει μέτρο:  $F_k = m \cdot a_k = 2\text{N}$ . Στο σώμα που φαίνεται στο σχήμα θα είναι:  $F_N - w = m \cdot a_k$  . ...

➤ Παρατήρηση:

Η κεντρομόλος δύναμη δεν είναι μία επιπλέον δύναμη που ασκείται στο σώμα που κάνει κυκλική κίνηση, αλλά η συνισταμένη των δυνάμεων που ήδη δέχεται, στην διεύθυνση της ακτίνας του...

## 6. Εξισώσεις, σχέσεις μεγεθών στην ομαλή κυκλική κίνηση....

Αν το σώμα που περιστρέφεται εκτελέσει μία περιστροφή:

- ο Θα διανύσει τόξο ίσο με την περιφέρεια του κύκλου, δηλαδή  $\Delta s = 2\pi \cdot R$ , σε χρόνο  $\Delta t = T$ . Έτσι η γραμμική ταχύτητα έχει μέτρο:

$$v = \frac{2\pi R}{T}$$

- ο Θα διαγράψει γωνία  $\Delta\theta = 2\pi$  (...360°) σε χρόνο  $\Delta t = T$ . Άρα:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

- ο Για την κεντρομόλο δύναμη μπορούμε να γράψουμε ότι:

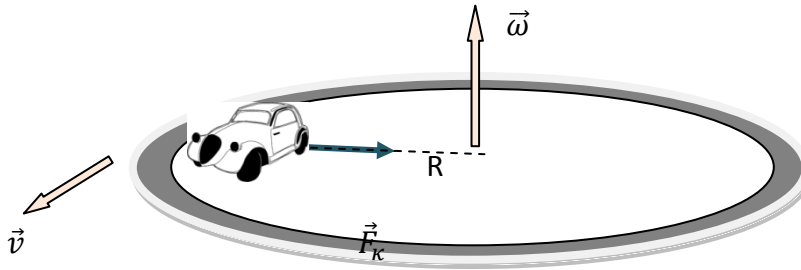
$$F_k = m \cdot a_k \Rightarrow F_k = m \cdot \frac{v^2}{R} = m \cdot \omega^2 \cdot R$$

➤ Παρατήρηση:

Στην ομαλή κυκλική κίνηση, η συχνότητα και η περίοδος παραμένουν σταθερές. Σταθερή είναι και η γωνιακή ταχύτητα  $\vec{\omega}$ , ενώ τα μεγέθη «γραμμική ταχύτητα  $\vec{v}$ », «κεντρομόλος δύναμη  $\vec{F}_k$ » και «κεντρομόλος επιτάχυνση  $\vec{a}_k$ » διατηρούνται σταθερά μόνο ως προς το μέτρο τους, αλλά αλλάζουν συνεχώς διεύθυνση.

## ✓ Παραδείγματα.

1. Ένα αυτοκίνητο κινείται σε οριζόντιο κυκλικό δρόμο, με ταχύτητα μέτρου  $v = 10\text{m/s}$ . Η ακτίνα της τροχιάς του είναι  $R = 50\text{m}$  και η μάζα του αυτοκινήτου  $m = 1200\text{kg}$ .



Η περίοδος της κίνησης του (δηλ. ο χρόνος για να εκτελέσει μία περιστροφή) θα είναι:

$$v = 2\pi R/T \Rightarrow T = 2\pi R/v = 6,28 \cdot 50/10 \text{ s} = 31,4\text{s}$$

Η συχνότητα περιστροφής του είναι :

$$f = 1/T = 1/31,4 \text{ Hz.}$$

Η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του είναι:

$$\omega = 2\pi/T = 2 \cdot 3,14/31,4 \text{ r/s} = 0,2 \text{ r/s.}$$

(ή αλλιώς  $v = \omega \cdot R \Rightarrow \omega = v/R = 10/50 \text{ r/s} = 0,2 \text{ r/s}$ )

Η κεντρομόλος επιτάχυνση που δέχεται έχει μέτρο:

$$a_k = v^2/R = 2\text{m/s}^2$$

Η κεντρομόλος δύναμη που δέχεται έχει μέτρο:

$$F_k = m \cdot a_k = 2400\text{N}$$

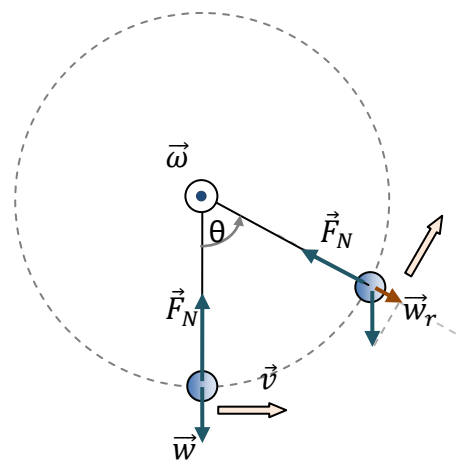
2. Μία σφαίρα είναι δεμένη στο άκρο ενός νήματος και περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο με κατάλληλο τρόπο ώστε να διατηρείται σταθερή η γωνιακή της ταχύτητα. Η ακτίνα περιστροφής της είναι  $R = 2\text{m}$ , η μάζα της είναι  $m = 100\text{g}$  (...=  $0,1\text{kg}$ ) και κάνει  $N = 4$  περιστροφές σε χρόνο  $\Delta t = 2\text{s}$ .

Η συχνότητα περιστροφής της είναι:

$$f = N/\Delta t = 2\text{Hz.}$$

Η περίοδος περιστροφής της είναι:

$$T = 1/f = 0,5\text{s}$$





Η γωνιακή της ταχύτητα έχει μέτρο :

$$\omega = 2\pi \cdot f = 4\pi \text{ r/s}$$

Η γραμμική της ταχύτητα έχει μέτρο:

$$v = \omega \cdot R = 8\pi \text{ m/s}$$

Η κεντρομόλος επιτάχυνση που δέχεται είναι:

$$\alpha_k = \omega^2 \cdot R = 16\pi^2 \text{ m/s}^2$$

Η κεντρομόλος δύναμη που δέχεται έχει μέτρο:

$$F_k = m \cdot \alpha_k = 1,6\pi^2 \text{ Newton.}$$

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε την δύναμη που ασκεί το νήμα στην σφαίρα όταν αυτή περνάει από το κατώτερο σημείο της τροχιάς της:

$$F_k = \Sigma F_r = F_N - m \cdot g \Rightarrow F_N = m \cdot g + F_k = 1 + 1,6\pi^2 \approx 17 \text{ Newtons}$$

Σε μία θέση όπου το νήμα σχηματίζει γωνία  $\theta = 30^\circ$  με την κατακόρυφη, ρόλο κεντρομόλου έχει η συνιστώσα του βάρους  $w_r$  μαζί με την τάση του νήματος:

$$F_k = \Sigma F_r = F_N - w_r = F_N - m \cdot g \cdot \sin 30^\circ$$

3. Ένα δύο αντικείμενα Α και Β κινούνται πάνω σε κυκλική τροχιά ακτίνας  $R = 3\text{m}$ . Η γωνιακή ταχύτητα του Α έχει μέτρο  $\omega_A = 0,2\pi \text{ r/s}$  ενώ του Β,  $\omega_B = 0,6\pi \text{ r/s}$ .

Η γραμμική ταχύτητα του Α είναι :

$$v_A = \omega_A \cdot R = 0,6\pi \text{ m/s}$$

Η γραμμική ταχύτητα του Β είναι :

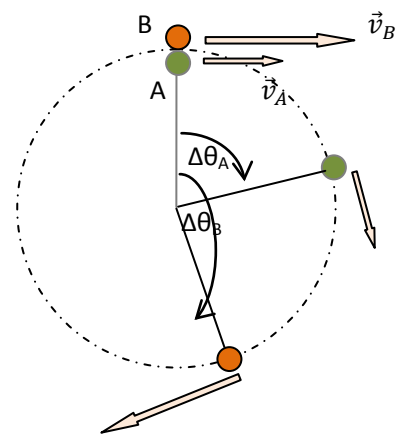
$$v_B = \omega_B \cdot R = 1,8\pi \text{ m/s}$$

Αν τα δύο αντικείμενα αρχικά βρίσκονταν στο ίδιο σημείο και περιστρέφονται προς την ίδια κατεύθυνση:

Το Α διαγράφει γωνία  $\Delta\theta_A = \omega_A \cdot \Delta t$ .

Το Β διαγράφει γωνία  $\Delta\theta_B = \omega_B \cdot \Delta t$ .

Το Β που περιστρέφεται πιο γρήγορα θα προηγηθεί του Α και κάποια στιγμή όταν θα έχει ολοκληρώσει έναν κύκλο περισσότερο (...δηλαδή όταν θα έχει διαγράψει γωνία κατά  $2\pi \text{ rad}$  περισσότερη από το Α), θα το ξαναφτάσει. Αυτό θα συμβεί όταν:



$$\Delta\theta_B - \Delta\theta_A = 2\pi \Rightarrow \omega_B \cdot \Delta t - \omega_A \cdot \Delta t = 2\pi \Rightarrow \Delta t = \frac{2\pi}{\omega_B - \omega_A} = 5s$$

Σε αυτόν τον χρόνο το Α έχει διανύσει διάστημα

$$\Delta s_A = v_A \cdot \Delta t = 3\pi \text{ m.}$$

Αν τα δύο αντικείμενα αρχικά βρίσκονταν στο ίδιο σημείο και περιστρέφονται προς σε αντίθετες κατευθύνσεις:

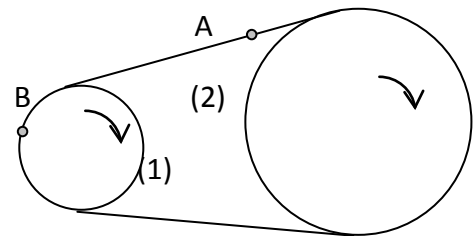
$$\Delta\theta_B + \Delta\theta_A = 2\pi \Rightarrow \omega_B \cdot \Delta t + \omega_A \cdot \Delta t = 2\pi \Rightarrow \Delta t = \frac{2\pi}{\omega_B + \omega_A} = 2,5s$$

**Ασκήσεις – Ερωτήσεις**

1. Δύο αντικείμενα κινούνται ομαλά σε κυκλικές τροχιές ίδιας ακτίνας έτσι ώστε το Α να έχει διπλάσια γωνιακή ταχύτητα από το Β. Τι από τα παρακάτω πιστεύετε ότι ισχύει;

- Α.** Τα δύο αντικείμενα κινούνται χωρίς επιτάχυνση.  
**Β.** Το Α έχει διπλάσια κεντρομόλο επιτάχυνση από το Β  
**Γ.** Το Α έχει τετραπλάσια επιτάχυνση από το Β  
**Δ.** Το Α έχει την μισή κεντρομόλο επιτάχυνση από το Β.

2. Ένας ιμάντας είναι περασμένος στους τροχούς (1) και (2) που περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα όπως στο σχήμα. Ποια σημεία πιστεύετε ότι έχουν επιτάχυνση;



- Α.** Το Α και το Β    **Β.** Το Α  
**Γ.** Το Β            **Δ.** Κανένα

3. Στο σύστημα των τροχών της προηγούμενης ερώτησης:

- Α.** Όλα τα σημεία του ιμάντα έχουν την ίδια ταχύτητα  
**Β.** Όλα τα σημεία του ιμάντα έχουν γωνιακή ταχύτητα ( $\neq 0$ )  
**Γ.** Οι δύο τροχοί περιστρέφονται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα  
**Δ.** Τα σημεία της περιφέρειας των τροχών έχουν το ίδιο μέτρο γραμμικής ταχύτητας.

4. Ένα αντικείμενο εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση και σε χρόνο 6 sec διαγράφει 3 περιστροφές. Η ακτίνα περιστροφής του είναι  $R = 0,4\text{m}$ .

- Α.** Πόση είναι η συχνότητα περιστροφής του και ποια η περίοδος;  
**Β.** Υπολογίστε το μέτρο της γωνιακής του ταχύτητας.  
**Γ.** Ποιο είναι το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης που δέχεται;  
**Δ.** Να υπολογίσετε την γωνία που θα έχει περιστραφεί σε χρονική διάρκεια  $\Delta t = 1,5\text{s}$ .

5. Η σελήνη περιστρέφεται γύρω από την γη ολοκληρώνοντας μία περιστροφή σε 28 μέρες (περίπου). Αν θεωρήσουμε ότι η περιστροφή είναι απόλυτα κυκλική σε απόσταση 385000 km από το κέντρο της γης, υπολογίστε:

**A.** Το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας περιστροφής της σελήνης

**B.** Την γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της σελήνης.

**Γ.** Η μάζα της σελήνης είναι προσεγγιστικά  $m = 7,5 \cdot 10^{22} \text{ kg}$ . Ποιο είναι το μέτρο της δύναμης που δέχεται από την γη;

( $\pi = 3,14$ . Χρησιμοποιείτε κομπιουτεράκι για τους υπολογισμούς σας)

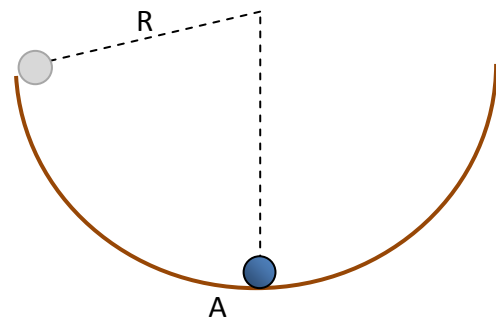
6. Δύο ποδηλάτες Α και Β περιστρέφονται σε κυκλικό στίβο, με ταχύτητες σταθερού μέτρου προς την ίδια κατεύθυνση. Αν η γραμμική ταχύτητα του Α έχει μέτρο  $u_A = 5 \text{ m/s}$  και του Β  $u_B = 6 \text{ m/s}$  και η ακτίνα του στίβου είναι 40m, να υπολογίσετε.

**A.** Την τιμή της γωνιακής ταχύτητας του κάθε ποδηλάτη.

**B.** Τον χρόνο που χρειάζεται ο κάθε ένας για να κάνει μία πλήρη περιστροφή.

**Γ.** Αρχικά οι δύο ποδηλάτες ξεκίνησαν από την ίδια θέση. Ποιος από τους δύο θα προηγηθεί; Σε πόσο χρόνο θα προλάβει τον άλλο για πρώτη φορά;

7. Αφήνουμε μία μικρή σφαίρα (αμελητέων διαστάσεων) να κινηθεί σε μία ημικυκλική τροχιά όπως στο διπλανό σχήμα. Την στιγμή που περνάει από το κατώτερο σημείο της τροχιάς της Α, έχει ταχύτητα μέτρου  $u = 2 \text{ m/s}$ . Η μάζα της είναι  $m = 200 \text{ g}$  και η ακτίνα της τροχιάς  $R = 20 \text{ cm}$ .



**A.** Σχεδιάστε τις δυνάμεις που δέχεται η σφαίρα στην θέση Α.

**B.** Πόση είναι η συνισταμένη δύναμη στην κατακόρυφη διεύθυνση;

**Γ.** Υπολογίστε το μέτρο της κάθετης αντίδραση που δέχεται η σφαίρα από το έδαφος.

**Δ.** Πόση θα ήταν η προηγούμενη δύναμη, αν η σφαίρα κινούνταν ευθύγραμμα με το ίδιο μέτρο ταχύτητας;

Δίνεται ότι  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

## Ορμή

### 1. Πόσο εύκολα (... η δύσκολα) σταματάει ένα αντικείμενο;

Εξαρτάται από την ταχύτητα, αλλά **και** από τη μάζα του.



✓ Το λεωφορείο σταματάει πιο δύσκολα από το ποδήλατο που κινείται με την ίδια ταχύτητα.

✓ Ένα αυτοκίνητο θα σταματήσει πιο εύκολα αν κινείται με μικρή ταχύτητα...



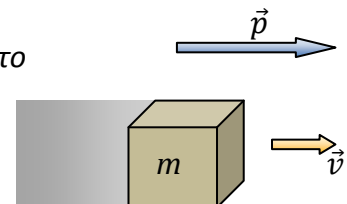
### 2. Τελικά, αρκεί να γνωρίζουμε μόνο την ταχύτητα ενός αντικειμένου, για να προβλέψουμε πόσο εύκολα θα αλλάξει η ο τρόπος κίνησής του;

Πρέπει να γνωρίζουμε και τη μάζα του. Έτσι, ορίζουμε ένα μέγεθος που περιλαμβάνει και την μάζα  $m$  και την ταχύτητα  $\vec{v}$ :

**Ορμή  $\vec{p}$** , είναι το διανυσματικό μέγεθος που προκύπτει από το γινόμενο της μάζας επί την ταχύτητα του σώματος.

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

Μονάδα:  $\text{kg} \cdot \text{m/s}$ .



#### ✓ Παράδειγμα.

Δύο αντικείμενα με μάζες  $m_1 = 2\text{kg}$  και  $m_2 = 4\text{kg}$  αφήνονται ελεύθερα να πέσουν. Κάποια στιγμή έχουν και τα δύο ταχύτητες μέτρου  $u_1 = u_2 = 20\text{m/s}$ .

Η ορμή του πρώτου είναι  $p_1 = m_1 \cdot u_1 = 40\text{kg} \cdot \text{m/s}$  ενώ του δεύτερου είναι  $p_2 = m_2 \cdot u_2 = 80\text{kg} \cdot \text{m/s}$ . Αν και οι ταχύτητες τους είναι ίδιες, το δεύτερο έχει μεγαλύτερη ορμή και σταματάει πιο δύσκολα...

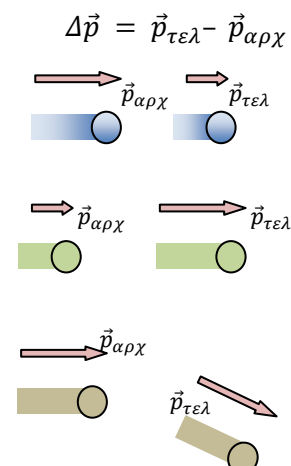
### 3. Πως μπορεί να αλλάξει η ορμή ενός σώματος;

- Αν αλλάξει η μάζα του,  $m$
- Αν αλλάξει η ταχύτητα του,  $\vec{v}$ .

Όμως, αλλαγή της ταχύτητας σημαίνει επιτάχυνση.

Την επιτάχυνση την προκαλεί η **δύναμη**.

$$\vec{F} \rightarrow \vec{a} \rightarrow \Delta \vec{v} \rightarrow \Delta \vec{p}$$



#### 4. Ποια σχέση συνδέει την δύναμη με την μεταβολή της ορμής;

Η δύναμη, εκτός από μεταβολή στην ταχύτητα, προκαλεί μεταβολή και στην ορμή. Όσο μεγαλύτερη είναι, τόσο πιο γρήγορα αλλάζει η ορμή. Δηλαδή:

Η συνισταμένη δύναμη είναι ίση με τον ρυθμό μεταβολής της ορμής (2<sup>ος</sup> Νόμος του Νεύτωνα).

$$\vec{\Sigma F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$$

##### ✓ Παραδείγματα.

- Ένα αντικείμενο δέχεται δύναμη μέτρου  $F = 20\text{N}$  για χρονική διάρκεια  $\Delta t = 5\text{s}$ . Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα η ορμή του να μεταβληθεί κατά  $100\text{ kg}\cdot\text{m/s}$ :

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} \Rightarrow \Delta p = F \cdot \Delta t = 100\text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

- Μία μοτοσικλέτα κινείται με ταχύτητα μέτρου  $v=20\text{m/s}$ , και η μάζα της είναι  $m=250\text{kg}$  (μαζί με τον αναβάτη). Αν η δύναμη τη ασκεί το σύστημα των φρένων της είναι  $F = -400\text{N}$  (αντίθετα στην φορά κίνησης), για να σταματήσει θα χρειαστεί χρόνο  $\Delta t$  που υπολογίζεται ως:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta p}{F} = \frac{0 - m \cdot v}{-F} = 12,5\text{s}$$

Ένα αυτοκίνητο που κινείται με την ίδια ταχύτητα και έχει μάζα  $m_2 = 1500\text{kg}$ , για να σταματήσει στον ίδιο χρόνο πρέπει να δεχθεί δύναμη:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{0 - m_2 \cdot v}{\Delta t} = 2400\text{N}$$

- Ένας αθλητής μάζας  $m = 76\text{kg}$ , στο άλμα επί κοντώ, πέφτει στο στρώμα με ταχύτητα  $v = 9\text{m/s}$ . Ο χρόνος που χρειάζεται για να σταματήσει είναι  $\Delta t = 2\text{s}$ , και έτσι η συνισταμένη δύναμη που δέχεται έχει μέτρο:

$$\Sigma F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{|0 - m \cdot v|}{\Delta t} = 342\text{N}$$

Αν δεν υπήρχε το ...στρώμα, θα σταματούσε σε χρόνο  $\Delta t_2 = 0,5\text{s}$  (...πιο απότομα!)

Τότε η συνισταμένη δύναμη που θα δεχόταν θα είχε μέτρο:

$$\Sigma F = \frac{|0 - m \cdot v|}{\Delta t_2} = 1368\text{N} !$$



### 5. Ο 2<sup>ος</sup> Νόμος του Νεύτωνα & ο Θεμελιώδης Νόμος της Μηχανικής:

Συνδυάζοντας την εξίσωση που περιγράφει τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα και τις εξισώσεις ορισμού της επιτάχυνσης και της ορμής, γράφουμε:

$$\Sigma \vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} \Rightarrow \Sigma \vec{F} = \frac{\Delta m \cdot \vec{v}}{\Delta t} = m \cdot \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \Rightarrow \Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

- Σύμφωνα με την προηγούμενη, αν η μάζα είναι σταθερή, ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα και ο Θεμελιώδης νόμος της μηχανικής είναι ισοδύναμοι...

#### ✓ Παραδείγματα.

1. Ένα σώμα μάζας  $m = 2\text{kg}$ , δέχεται δύναμη και η ταχύτητα του μεταβάλλεται από  $v_1 = 5\text{m/s}$  σε  $v_2 = 10\text{m/s}$ . Ο χρόνος που χρειάστηκε για την μεταβολή αυτή ήταν  $\Delta t = 5\text{s}$ .

Εφαρμόζοντας τον 2<sup>ο</sup> Ν.Ν., υπολογίζουμε το μέτρο της συνισταμένης δύναμης:

$$\Sigma F = \frac{p_2 - p_1}{\Delta t} = \frac{mv_2 - mv_1}{\Delta t} = 2\text{N}$$

Στο ίδιο καταλήγουμε και από τον Θ.Ν.Μ.:

$$\alpha = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} = 1\text{m/s}^2$$

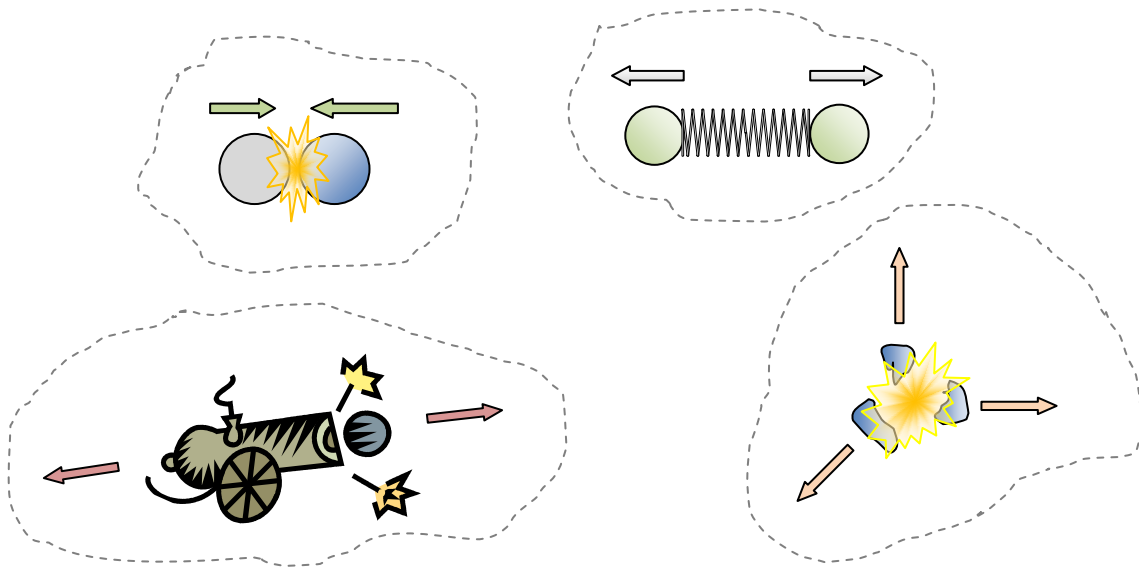
$$\text{και } \Sigma F = m \cdot \alpha = 2\text{N}.$$

2. Η συνισταμένη δύναμη που δέχεται ένα σώμα, έχει μέτρο  $\Sigma F = 30\text{N}$ . Σύμφωνα με τον 2<sup>ο</sup> Νόμο του Νεύτωνα, αυτός θα είναι και ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του:

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \Sigma F = 30\text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

(Αυτό σημαίνει ότι κάθε δευτερόλεπτο η ορμή του σώματος αλλάζει κατά  $30\text{kg} \cdot \text{m/s}$ )

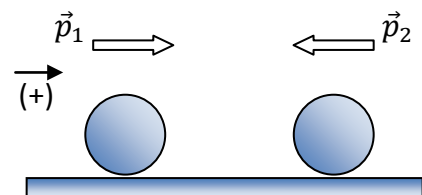
**6. Δύο ή παραπάνω σώματα που αλληλεπιδρούν αποτελούν ένα σύστημα σωμάτων.**



Η ορμή ενός συστήματος σωμάτων είναι το διανυσματικό άθροισμα των ορμών, όλων των σωμάτων που αποτελούν το σύστημα.

✓ **Παράδειγμα.**

Δύο σφαίρες κινούνται όπως στο σχήμα, σε αντίθετες κατευθύνσεις. Οι μάζες τους είναι  $m_1 = 0,2\text{kg}$ ,  $m_2 = 0,4\text{kg}$  και οι ταχύτητες τους έχουν μέτρο  $u_1 = 10\text{m/s}$  και  $u_2 = 5\text{m/s}$  αντίστοιχα. Η ορμή του συστήματος του θα είναι:



$$\vec{p}_{ολ} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

και, θεωρώντας θετική φορά προς τα δεξιά:

$$p_{ολ} = p_1 - p_2 \Rightarrow p_{ολ} = m_1 \cdot v_1 - m_2 \cdot v_2 = 0$$

**7. Πως μπορεί να αλλάξει η ορμή ενός συστήματος σωμάτων;**

Αν τα σώματα του συστήματος δέχονται δυνάμεις εξωτερικές (δηλαδή που προέρχονται από σώματα εκτός του συστήματος), θα αλλάξει η ολική ορμή του συστήματος.

✓ **Παράδειγμα:**

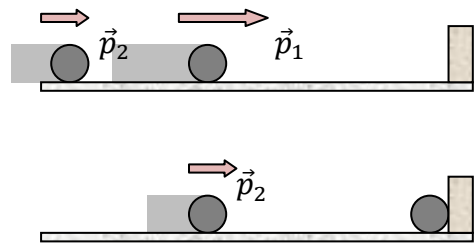
Δύο μπάλες του bowling (σύστημα) κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση, όπως στο σχήμα. Οι ταχύτητές τους έχουν μέτρο  $u_1 = 2\text{m/s}$  και  $u_2 = 1\text{m/s}$  και οι μάζες τους είναι  $m_1 = m_2 = 5\text{kg}$ . Η ορμή του συστήματος τους έχει μέτρο:



$$p_{ολ} = p_1 + p_2 = m \cdot u_1 + m \cdot u_2 = 15 \text{ kg} \cdot \text{m/s}.$$

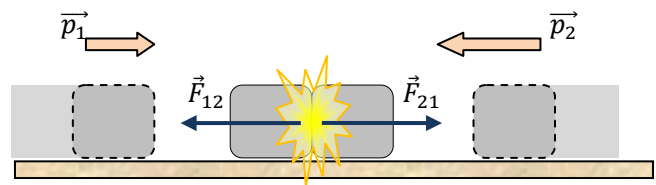
Κάποια στιγμή η πρώτη μπάλα χτυπάει στον τοίχο (ο οποίος δεν ανήκει στο σύστημα), δέχεται δύναμη από αυτόν και σταματάει. Η ορμή του συστήματος τώρα γίνεται:

$$p_{ολ}' = p_2 = 5 \text{ kg} \cdot \text{m/s}.$$



8. **Αν στα σώματα του συστήματος ασκούνται μόνο εσωτερικές δυνάμεις (οι μεταξύ τους δυνάμεις αλληλεπίδρασης), οι ορμές τους μεταβάλλονται με τέτοιο τρόπο ώστε η συνολική ορμή να μην αλλάζει... Γιατί;**

Δύο αντικείμενα κινούνται το ένα προς το άλλο έτσι ώστε να συγκρουστούν. Οι μάζες τους είναι  $m_1$  και  $m_2$  και οι ταχύτητες τους  $u_1$  και  $u_2$  αντίστοιχα. Την στιγμή που



συγκρούονται, ασκούν το ένα στο άλλο δυνάμεις αλληλεπίδρασης  $F_{12}$  και  $F_{21}$  (σχήμα). Έτσι η ορμή του καθενός αλλάζει, σύμφωνα με τον 2<sup>ο</sup> Νόμο του Νεύτωνα:

$$\Delta \vec{p}_1 = \vec{F}_{12} \cdot \Delta t$$

$$\Delta \vec{p}_2 = \vec{F}_{21} \cdot \Delta t$$

Όμως οι δύο δυνάμεις είναι της μορφής Δράση – Αντίδραση, άρα ισχύει ότι:

$$F_{12} = -F_{21}$$

Η συνολική μεταβολή της ορμής θα είναι:

$$\Delta \vec{p}_{ολ} = \Delta \vec{p}_1 + \Delta \vec{p}_2 \Rightarrow \Delta \vec{p}_{ολ} = \vec{F}_{12} \cdot \Delta t + \vec{F}_{21} \cdot \Delta t$$

Λόγω της σχέσης των  $F_{12}$  και  $F_{21}$  καταλήγουμε:

$$\Delta p_{ολ} = F_{12} \cdot \Delta t - F_{12} \cdot \Delta t = 0$$

Δηλαδή: Οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης ανάμεσα στα σώματα, προκαλούν αντίθετες μεταβολές στην ορμή του συστήματος (π.χ. η ορμή του ενός σώματος αυξάνεται και του άλλου ελαττώνεται) και έτσι η συνολική ορμή δεν αλλάζει...

➤ Παρατήρηση:

Κατά την διάρκεια μίας κρούσης, οι δυνάμεις ανάμεσα στα σώματα δεν έχουν σταθερή τιμή. Έτσι χρησιμοποιούμε τη μέση τιμή των δυνάμεων (δηλ., τη σταθερή δύναμη με την οποία έπρεπε να αλληλεπιδράσουν τα σώματα για να προκληθεί η ίδια μεταβολή στις ορμές τους).

✓ **Παραδείγματα:**

1. Μια μπίλια του μπιλιάρδου μάζας  $m = 0,5\text{kg}$  κινείται με ταχύτητα  $u_1 = 1\text{m/s}$  και συγκρούεται με μία δεύτερη μπίλια, ίσης μάζας. Η κρούση είναι κεντρική και έτσι μετά την σύγκρουση η πρώτη μπίλια σταματάει. Η δεύτερη θα φύγει με ταχύτητα  $u_2 = 1\text{m/s}$ , (ίση με της πρώτης):

$$\vec{p}_{\text{πριν}} = \vec{p}_{\text{μετά}} \Rightarrow m_1 \cdot v_1 + 0 = 0 + m_2 \cdot v_2$$

Όμως  $m_1 = m_2$  άρα:

$$v_1 = v_2 = 1\text{m/s}$$

Η μεταβολή της ορμής της κάθε μίας σφαίρας έχει τιμή:

$$\Delta p_1 = p_{1\text{μετά}} - p_{1\text{πριν}} = 0 - m_1 \cdot v_1 = -0,5\text{kg}\cdot\text{m/s}$$

$$\Delta p_2 = p_{2\text{μετά}} - p_{2\text{πριν}} = m_2 \cdot v_2 - 0 = 0,5\text{kg}\cdot\text{m/s}$$

Αν η κρούση είχε διάρκεια  $\Delta t = 0,5\text{s}$ , η δύναμη που δέχτηκε κάθε σφαίρα έχει αλγεβρική τιμή:

$$F_{12} = \frac{\Delta p_1}{\Delta t} = -1\text{N}$$

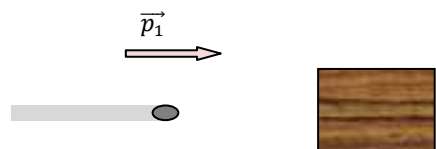
$$F_{21} = \frac{\Delta p_2}{\Delta t} = 1\text{N}$$

2. Μία σφαίρα που κινείται με ταχύτητα  $u_1 = 200\text{m/s}$  σφηνώνεται σε ένα κομμάτι ξύλο που αρχικά ήταν ακίνητο. Η μάζα της σφαίρας είναι  $m_1 = 0,1\text{kg}$  και του ξύλου  $m_2 = 1,9\text{kg}$ . Η ορμή του συστήματος πριν την σύγκρουση έχει τιμή:

$$p_{\text{ολ(ΠΡΙΝ)}} = p_1 + p_2 = m_1 \cdot u_1 + 0 = 20\text{kg}\cdot\text{m/s}$$

Μετά την σύγκρουση, η σφαίρα μαζί με το ξύλο κινούνται σαν ένα σώμα (συσσωμάτωμα), συνολικής μάζας  $m_{\text{ολ}} = m_1 + m_2 = 2\text{kg}$  και ταχύτητα  $u = 10\text{m/s}$ . Η συνολική ορμή μετά την κρούση, αφού δεν έχει ασκηθεί καμία άλλη δύναμη εκτός από τις μεταξύ τους δυνάμεις, θα παραμείνει όση και πριν:

$$p_{\text{ολ(ΜΕΤΑ)}} = m_{\text{ολ}} \cdot u = 20\text{kg}\cdot\text{m/s}.$$



3. Ένα όπλο αρχικά ακίνητο, εκपुरσοκροτεί. Η μάζα του όπλου είναι  $m_o = 5\text{kg}$  και η μάζα της σφαίρας είναι  $m_\sigma = 0,05\text{kg}$ . Η σφαίρα φεύγει με ταχύτητα  $v_\sigma = 400\text{m/s}$ . Επειδή στο σύστημα των σωμάτων όπλο – σφαίρα ασκήθηκαν μόνο εσωτερικές δυνάμεις την στιγμή του πυροβολισμού, θα ισχύει:

$$\text{Ορμή συστήματος πριν} = \text{ορμή συστήματος μετά}$$

Με την βοήθεια αυτής της ισότητας μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα με την οποία «κλωτσάει» το όπλο (...ταχύτητα ανάκρουσης).

$$\vec{p}_{ολ\piριν} = \vec{p}_{ολμετά} \Rightarrow 0 = m_o \cdot v_o - m_\sigma \cdot v_\sigma \Rightarrow m_o \cdot v_o = m_\sigma \cdot v_\sigma$$

Τελικά:

$$v_o = \frac{m_\sigma \cdot v_\sigma}{m_o} = 4\text{m/s}$$

## 9. Η αρχή διατήρησης της ορμής:

Όταν σ' ένα σύστημα σωμάτων δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις (ή η συνισταμένη τους είναι μηδέν), η ορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή.

Την αρχή διατήρησης της ορμής μπορούμε να την εφαρμόσουμε σε κάθε κρούση, αφού αυτά τα φαινόμενα είναι αποτέλεσμα στιγμιαίας αλληλεπίδρασης των σωμάτων.

### ➤ Παρατήρηση:

Η αρχή διατήρησης της ορμής είναι μια αρχή με παγκόσμια ισχύ. Εφαρμόζεται από τις μικρότερες κλίμακες της ύλης (π.χ. πυρηνικές διασπάσεις) μέχρι τις μεγαλύτερες (κινήσεις ουρανίων σωμάτων!)

**Ερωτήσεις - Ασκήσεις**

Όπου χρειάζεται, θεωρείστε ότι  $g = 10\text{m/s}^2$

1. Μία μικρή ελαστική μπάλα μάζας  $m$ , κινείται σε οριζόντια διεύθυνση με ταχύτητα  $u$  προς την θετική φορά. Κάποια στιγμή χτυπάει σε κατακόρυφο τοίχο και γυρίζει προς τα πίσω με ταχύτητα ίδιου μέτρου με αυτού της αρχικής. Η μεταβολή της ορμής της έχει τιμή:

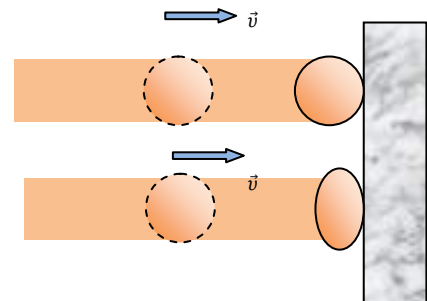
**A.**  $\Delta p = 0$

**B.**  $\Delta p = 2m \cdot u$

**Γ.**  $\Delta p = -2m \cdot u$

**Δ.**  $\Delta p = m \cdot u$

2. Μία φουσκωμένη και μία λίγο ξεφούσκωτη μπάλα κτυπούν με την ίδια ταχύτητα σε έναν κατακόρυφο τοίχο. Αν οι δύο μπάλες έχουν την ίδια μάζα, ποια από τις επόμενες προτάσεις ισχύει;



**A.** Η φουσκωμένη μπάλα ασκεί μεγαλύτερη δύναμη στον τοίχο.

**B.** Και οι δύο μπάλες ασκούν την ίδια δύναμη.

**Αιτιολογείστε την επιλογή σας.**

3. Ένα συγκρουόμενο αμαξάκι στο Λούνα-Παρκ με ένα παιδί μέσα, έχει μάζα  $m_1 = 225\text{kg}$  και κινείται με ταχύτητα  $u = 1\text{m/s}$ . Συγκρούεται με το προστατευτικό τοίχωμα και σταματά σε χρόνο  $\Delta t = 1,5\text{s}$ .

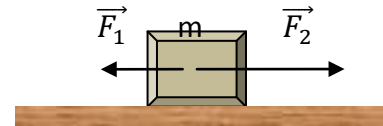
**A.** Ποιο είναι το μέτρο της ορμής που έχει το αμαξάκι;

**B.** Ποιο το μέτρο της (μέσης) δύναμης που δέχεται από το τοίχωμα για να σταματήσει;

**Γ.** Πόση δύναμη θα χρειαζόταν αν δεν υπήρχε ο λαστιχένιος προφυλακτήρας και σταματούσε ποιο απότομα, σε χρόνο  $\Delta t_2 = 0,5\text{s}$

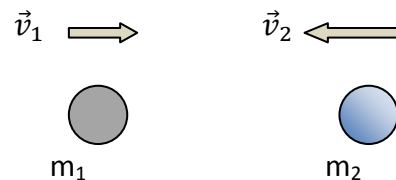
**Δ.** Πόση δύναμη θα έπρεπε να δεχτεί για να σταματήσει στον ίδιο χρόνο ( $\Delta t = 1,5\text{s}$ ) αν μέσα στο αμαξάκι καθόταν δύο παιδιά και η μάζα ήταν συνολικά  $m_2 = 300\text{kg}$ ;

4. Στο κιβώτιο του σχήματος που αρχικά ηρεμεί, ασκούνται οι δυνάμεις  $\vec{F}_1$  και  $\vec{F}_2$  με μέτρα  $F_1 = 50\text{N}$  και  $F_2 = 30\text{N}$  αντίστοιχα. Η μάζα του είναι  $m = 4\text{kg}$ .



- A.** Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του κιβωτίου;  
**B.** Πόσο θα έχει αλλάξει η ορμή του μετά από  $\Delta t = 2\text{s}$ ;  
**Γ.** Ποια θα είναι η τιμή της ορμής και της ταχύτητάς του την χρονική στιγμή  $t = 2\text{s}$ ;  
**Δ.** Ποιο είναι το μέτρο της επιτάχυνσης που απέκτησε;

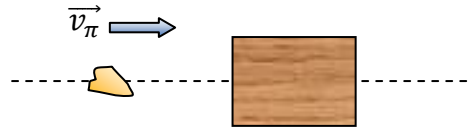
5. Στο διπλανό σχήμα, οι δύο σφαίρες έχουν μάζες  $m_1 = 2\text{kg}$  και  $m_2 = 3\text{kg}$  ενώ τα μέτρα των ταχυτήτων τους είναι  $u_1 = 6\text{m/s}$  και  $u_2 = 4\text{m/s}$  αντίστοιχα. Η ορμή του συστήματος έχει μέτρο:



- A.**  $24\text{kg}\cdot\text{m/s}$       **B.** 0  
**Γ.** 24 N      **Δ.** 2m/s
6. Οι σφαίρες της προηγούμενης ερώτησης συγκρούονται. Τι από τα παρακάτω ισχύει;  
**A.** Η σφαίρα  $m_1$  ασκεί στην  $m_2$  δύναμη μεγαλύτερου μέτρου από ότι η  $m_2$  στην  $m_1$ .  
**B.** Η σφαίρα  $m_2$  ασκεί στην  $m_1$  δύναμη μεγαλύτερου μέτρου από ότι η  $m_1$  στην  $m_2$ .  
**Γ.** Η ορμή της κάθε μίας σφαίρας δεν αλλάζει.  
**Δ.** Οι ορμές των δύο σφαιρών μεταβάλλονται κατά αντίθετα ποσά.
7. Μία μπίλια μάζας  $m_1 = 200\text{g}$  κινείται σε οριζόντια διεύθυνση με ταχύτητα μέτρου  $u_1 = 3\text{m/s}$  και συγκρούεται με μία δεύτερη μπίλια μάζας  $m_2 = 100\text{g}$  που αρχικά κινούταν προς την ίδια κατεύθυνση, με ταχύτητα μέτρου  $u_2 = 2\text{m/s}$ . Μετά την σύγκρουση, η  $m_2$  κινείται με ταχύτητα μέτρου  $u_2' = 4\text{m/s}$ .  
**A.** Πόση είναι η ορμή του συστήματος πριν την κρούση;  
**B.** Πόση θα είναι η ορμή μετά την κρούση;  
**Γ.** Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας της  $m_1$  μετά την κρούση.

**Δ.** Πόση είναι η μεταβολή της ορμής της;

8. Ένα κομμάτι πλαστελίνης κτυπάει με ταχύτητα  $u_{\pi} = 0,5 \text{ m/s}$  πάνω σε ένα μικρό κομμάτι ξύλου, που αρχικά ήταν ακίνητο. Η μάζα της πλαστελίνης είναι  $m_{\pi} = 50 \text{ g}$  και η μάζα του ξύλου  $m_{\xi} = 950 \text{ g}$ .



**Α.** Πόση είναι η ταχύτητα που θα αποκτήσει το συσσωμάτωμα που δημιουργείται;

**Β.** Πόση είναι η μεταβολή της ορμής του κάθε αντικειμένου;

**Γ.** Πόση η μεταβολή της ορμής του συστήματός τους;

**Δ.** Αν η κρούση διήρκησε  $0,4 \text{ s}$ , πόση δύναμη δέχτηκε η κάθε μία μάζα;

9. Ένας πύραυλος μάζας  $m$  κινείται με ταχύτητα μέτρου  $u = 900 \text{ m/s}$ , όταν με κατάλληλο μηχανισμό σπάει σε δύο κομμάτια ίσης μάζας ( $m_1 = m_2 = m/2$ ). Το κομμάτι  $m_1$  αμέσως μετά την έκρηξη κινείται με ταχύτητα  $u_1 = 1200 \text{ m/s}$ , στην ίδια κατεύθυνση με την αρχική.

**Α.** Ποιο είναι το μέτρο της ταχύτητας του κομματιού  $m_2$ ;

**Β.** Αν η μάζα του πυραύλου είναι  $m = 2000 \text{ kg}$ , να υπολογίσετε την μεταβολή της ορμής του κάθε κομματιού.

**Γ.** Η διάσπαση διήρκησε χρόνο  $\Delta t = 0,3 \text{ s}$ . Πόση ήταν η μέση δύναμη που δέχτηκε κάθε κομμάτι για να γίνει η διάσπαση;

**Δ.** Αν μετά την διάσπαση, το κομμάτι  $m_1$  κινούταν σε αντίθετη κατεύθυνση από την αρχική, πόση θα ήταν η ταχύτητα του  $m_2$ ;

10. Μια μπάλα μάζας  $m = 1,5 \text{ kg}$ , αφήνεται ελεύθερη να πέσει από ύψος  $h = 0,8 \text{ m}$ . Κτυπάει στο έδαφος και αναπηδάει με ταχύτητα ίσου μέτρου (αυτής που έφτασε). Θεωρώντας την κίνησή της ελεύθερη πτώση, υπολογίστε:

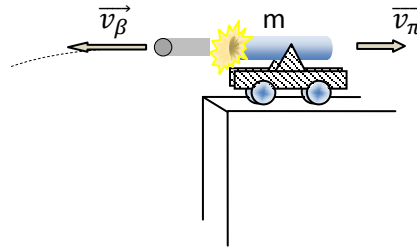
**Α.** Τον χρόνο που χρειάστηκε για να φτάσει στο έδαφος και την ταχύτητα με την οποία έφτασε.

**Β.** Την μεταβολή της ορμής της κατά την κρούση.

Γ. Αν η κρούση διήρκεσε  $\Delta t = 0,5s$ , την μέση συνισταμένη δύναμη που δέχτηκε κατά την διάρκεια της επαφής της με το έδαφος.

Δ. Την μέση δύναμη που δέχτηκε από το έδαφος.

11. Ένα πυροβόλο όπλο βρίσκεται ακίνητο, στερεωμένο πάνω σε ένα βαγόνι. Όλο το σύστημα έχει μάζα  $m = 201kg$ . Κάποια στιγμή το πυροβόλο εκपुरσοκροτεί και το βαγόνι κινείται προς τα πίσω με ταχύτητα  $u_{\pi} = 2m/s$ . Αν η μάζα του βλήματος είναι  $m_{\beta} = 1kg$  να υπολογίσετε:



Α. Το μέτρο της ορμής που απέκτησε το πυροβόλο μαζί με το βαγόνι, μετά την εκपुरσοκρότηση.

Β. Το μέτρο της ορμής που απέκτησε το βλήμα.

Γ. Πόση είναι η ταχύτητα με την οποία έφυγε το βλήμα;

Δ. Αν η βολή έγινε από ύψος  $h = 50m$ , σε πόση οριζόντια απόσταση θα φτάσει το βλήμα, πριν χτυπήσει στο έδαφος;

12. Μία σφαίρα κινείται σε οριζόντια διεύθυνση με ταχύτητα μέτρου  $u_1 = 200m/s$ . Κάποια στιγμή συγκρούεται με ένα ακίνητο κιβώτιο μάζας  $m_2 = 1950g$  και το συσσωμάτωμα που δημιουργείται, γλιστρά πάνω στο οριζόντιο δάπεδο μέχρι να σταματήσει τελικά λόγω τριβής. Η σφαίρα έχει μάζα  $50g$  και ο συντελεστής τριβής ανάμεσα στο δάπεδο και το κιβώτιο είναι  $\mu = 0,25$ .

Α. Πόση είναι η ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση;

Β. Πόση είναι η τριβή ανάμεσα στο κιβώτιο και το δάπεδο;

Γ. Υπολογίστε τον χρόνο που χρειάζεται το κιβώτιο μέχρι να σταματήσει.

Δ. Πόση απόσταση διανύει μέχρι να συμβεί αυτό;

## Ενέργεια - Έργο

### 1. Η φύση γύρω μας: Εικόνες ...

- ✓ Ο βράχος βρίσκεται σε ύψος πάνω από το έδαφος. Άρα, μπορεί να πέσει...



- ✓ Το ελατήριο είναι συσπειρωμένο. Αν το αφήσουμε ελεύθερο, θα εκτονωθεί.



- ✓ Η μπάλα κινείται με μεγάλη ταχύτητα. Άρα, χτυπώντας το τζάμι θα το σπάσει.

- ✓ Η θερμοκρασία του καλοριφέρ είναι υψηλή. Έτσι ο αέρας γύρω του ζεσταίνεται.

Σε κάθε ένα από τα προηγούμενα παραδείγματα, μπορούμε να προβλέψουμε πως θα κινηθεί το κάθε σώμα, η πως θα εξελιχθεί η κατάστασή του ... Και αυτό επειδή γνωρίζουμε την αρχική του κατάσταση.

### 2. ... Η φυσική περιγράφει τις εικόνες με έννοιες:

- ✓ Ο βράχος έχει ενέργεια λόγω της θέσης του, καθώς τον έλκει η γη. Μπορεί να πέσει χαμηλότερα και η ενέργεια του να ελαττωθεί...



- ✓ Το ελατήριο έχει ενέργεια λόγω της κατάστασής του. Ελευθερώνοντας το, απελευθερώνεται η ενέργεια του και επιστρέφει στην αρχική του κατάσταση.

- ✓ Η μπάλα έχει ενέργεια λόγω της κίνησής της. Όταν χτυπήσει το τζάμι, του μεταφέρει ένα μέρος από την ενέργειά της και το σπάει.

- ✓ Το καλοριφέρ έχει ενέργεια λόγω της κατάστασής του. Ο αέρας που το περιβάλλει, παίρνει ένα μέρος της ενέργειάς του και ζεσταίνεται.



Περιγράψαμε τις διαφορετικές εικόνες, με μια καινούρια έννοια: Την «ενέργεια». Έτσι, στα προηγούμενα παραδείγματα, λέμε ότι τα σώματα έχουν ενέργεια:

- Λόγω των δυνάμεων που δέχονται, στην θέση ή την κατάσταση που βρίσκονται
- Λόγω του ότι κινούνται ...
- Εξαιτίας της θερμοκρασίας που έχουν ...



Η ενέργεια είναι μέγεθος μονόμετρο και η μονάδα της είναι το *Joule* (S.I.).

### 3. Η ενέργεια λόγω κίνησης:

Η «Κινητική Ενέργεια» συνδέεται με την κίνηση ενός σώματος. Για ένα σώμα μάζας  $m$ , που προχωράει με ταχύτητα  $v$ , την υπολογίζουμε από την εξίσωση:

$$K = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

#### ➤ Παρατήρηση:

Η προηγούμενη εξίσωση υπολογίζει την κινητική ενέργεια ενός σώματος που κάνει μόνο μεταφορική κίνηση, δηλαδή κινείται χωρίς να περιστρέφεται. Έτσι, μια μπάλα του *bowling* που προχωράει με ταχύτητα  $v$  και ταυτόχρονα κυλάει, θα έχει επιπλέον κινητική ενέργεια, λόγω της περιστροφής της.

#### ✓ Παραδείγματα:

- Ένα αντικείμενο με μάζα  $m = 2\text{kg}$  κινείται με ταχύτητα  $v = 2\text{m/s}$ . Η κινητική του ενέργεια είναι:

$$K = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = 4\text{J}$$

Αν το ίδιο αντικείμενο κινούταν με διπλάσια ταχύτητα ( $v = 4\text{m/s}$ ) η κινητική του ενέργεια θα ήταν τετραπλάσια:

$$K' = \frac{1}{2} m \cdot (2v)^2 = 16\text{J}$$

Δεν θα συνέβαινε το ίδιο αν είχε διπλάσια μάζα:

$$K'' = \frac{1}{2} (2m) \cdot v^2 = 8\text{J}.$$

Για την κινητική ενέργεια, η ταχύτητα είναι «σημαντικότερος» παράγοντας από την μάζα ...

- Δύο όμοια αμαξάκια κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις με ταχύτητες ίσου μέτρου. Η μάζα του κάθε ενός είναι  $m = 600\text{g}$  και η ταχύτητά του είναι  $v = 3\text{m/s}$ . Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι:

$$K = K_1 + K_2 = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + \frac{1}{2} m \cdot v^2 = 5,4\text{J}.$$

Τα δύο αμαξάκια κινούνταν αντίθετα. Ωστόσο, προσθέσαμε τις κινητικές τους ενέργειες. Η κινητική ενέργεια δεν μπορεί να είναι αρνητική!

#### 4. Η ενέργεια λόγω των δυνάμεων αλληλεπίδρασης:

Η «Δυναμική Ενέργεια» συνδέεται με την αλληλεπίδραση ενός συστήματος σωμάτων. Αν η αλληλεπίδραση είναι βαρυτική τότε μιλάμε για «βαρυτική δυναμική ενέργεια», αν είναι ηλεκτρική, «ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος» κ.λ.π.

##### ✓ Παραδείγματα

1. Μία πέτρα αλληλεπιδράει με την γη και δέχεται από αυτήν την *βαρυτική δύναμη*. Λόγω αυτής της αλληλεπίδρασης μπορεί να μετακινηθεί (...να πέσει). Λέμε ότι έχει *βαρυτική δυναμική ενέργεια*.

*Βέβαια, δυναμική ενέργεια έχει και η γη αφού έλκεται από την πέτρα, πλην όμως δεν πρόκειται να κινηθεί προς αυτήν! Έτσι, αν και η ενέργεια υπάρχει στο σύστημα πέτρα – γη, μιλάμε μόνο για αυτήν της πέτρας.*

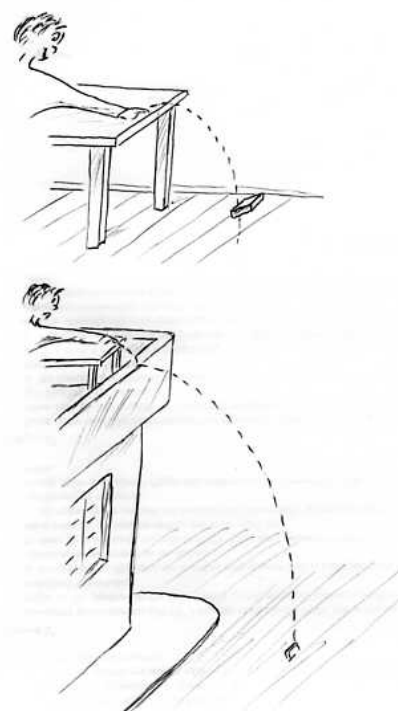
2. Δύο μικρές πέτρες σε κάποια απόσταση μεταξύ τους, πρακτικά δεν αλληλεπιδρούν (οι βαρυτικές δυνάμεις ανάμεσα τους είναι τόσο μικρές που είναι αδύνατον να τις μετακινήσουν). Έτσι η βαρυτική δυναμική ενέργεια του συστήματος τους λέμε ότι είναι μηδέν!
3. Δύο φορτία έλκονται, λόγω της *ηλεκτρικής* τους αλληλεπίδρασης και πλησιάζουν το ένα το άλλο. Θα πούμε ότι το σύστημα τους έχει *ηλεκτρική δυναμική ενέργεια*.

#### 5. Πως μπορώ να μετρήσω την δυναμική ενέργεια;

- ✓ Ένα αντικείμενο βρίσκεται στο γραφείο μου. Λόγω της βαρυτικής έλξης που δέχεται, μπορεί να πέσει το πολύ μέχρι το πάτωμα. Αν πέσει εκεί, δεν μπορεί να πάει παρακάτω... Άρα στο γραφείο έχει βαρυτική δυναμική ενέργεια, ενώ στο πάτωμα δεν έχει.

Αν όμως το τραπέζι βρίσκεται στο μπαλκόνι; Τότε μπορεί να πέσει και μέχρι τον δρόμο. Εκεί η βαρυτική δυναμική ενέργεια θα είναι μηδέν...

Για να μετρήσω την δυναμική ενέργεια, πρέπει πρώτα από όλα να γνωρίζω (...ή να ορίσω!), που η ενέργεια αυτή είναι «μηδέν» (δηλαδή, οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης δεν μπορούν να μετακινήσουν άλλο το σώμα). Την θέση αυτή την ονομάζω «επίπεδο αναφοράς» και συγκρίνοντας μ' αυτήν, υπολογίζω πόσο περισσότερη η



λιγότερη ενέργεια έχει το σύστημα.

➤ Παρατηρήσεις:

- ❖ Στην πραγματικότητα, η αλληλεπίδραση δεν μηδενίζεται ούτε στο πάτωμα ούτε στον δρόμο. Το αντικείμενο δέχεται βαρυτική δύναμη, και στις δύο θέσεις (άρα, ... τυπικά η δυναμική του ενέργεια δεν είναι μηδέν). Ωστόσο, όταν η αλληλεπίδραση αυτή δεν μπορεί να επηρεάσει την μελλοντική του κατάσταση (π.χ. να πέσει χαμηλότερα), επιλέγουμε την θέση ως επίπεδο αναφοράς.
- ❖ Σε κάθε περίπτωση, αυτό που μας ενδιαφέρει και υπολογίζουμε, είναι η αλλαγή της δυναμικής ενέργειας ανάμεσα στην αρχική θέση του σώματος την τελική. Όποιο και να είναι το επίπεδο αναφοράς, η ενέργεια αλλάζει κατά το ίδιο ποσό, γίνεται η ίδια ... «δουλειά». Όμως η κατάλληλη επιλογή του, μας βοηθάει στον μαθηματικό υπολογισμό και την διατύπωση του κάθε προβλήματος!
- ✓ Κάτι αντίστοιχο συμβαίνει όταν μετράμε το ύψος μας. Μπορούμε να μετρήσουμε την απόσταση του κεφαλιού μας και των ποδιών μας από το έδαφος, και μετά να αφαιρέσουμε τις δύο μετρήσεις... Η, μήπως είναι πιο απλό να μετρήσουμε την απόσταση του κεφαλιού μας από το πάτωμα το οποίο θεωρούμε ότι είναι σε ύψος μηδέν (επίπεδο αναφοράς); 

## 6. Η βαρυτική δυναμική ενέργεια:

Για ένα σώμα μάζας  $m$  που βρίσκεται κοντά στην επιφάνεια της γης, μπορούμε να υπολογίσουμε την βαρυτική δυναμική ενέργεια από την σχέση:

$$U_B = m \cdot g \cdot h$$

$U_B$ : Συμβολισμός για την βαρυτική δυναμική ενέργεια

$h$ : Το ύψος στο οποίο βρίσκεται το σώμα, πάνω από το επίπεδο αναφοράς (ε-κεί που θεωρούμε ότι η δυν. ενέργεια «μηδενίζεται»).

### ✓ Παραδείγματα

Το τηλέφωνο βρίσκεται πάνω στο γραφείο, σε ύψος  $h_1 = 80\text{cm}$  από το πάτωμα. Η μάζα του είναι  $100\text{g}$ , άρα σε σχέση με το πάτωμα έχει βαρυτική δυναμική ενέργεια:

$$U_B = m \cdot g \cdot h_1 = 0,1 \cdot 10 \cdot 0,8\text{J} = 0,8\text{J}.$$

Ας πούμε τώρα ότι το γραφείο είναι στον πρώτο όροφο, σε ύψος  $h_2 = 3\text{m}$  από τον δρόμο. Αν θέλω να υπολογίσω την δυναμική ενέργεια σε σχέση με το έδαφος, τότε:

$$U_B = m \cdot g \cdot (h_1 + h_2) = 0,1 \cdot 10 \cdot 3,8 = 3,8\text{J}.$$

Σε κάθε μία περίπτωση το τηλέφωνο έχει διαφορετική βαρυτική δυναμική ενέργεια. Διαφορετικό όμως θα είναι και το αποτέλεσμα της πτώσης του (στο πάτωμα και στον δρόμο)! Έτσι κάθε φορά, υπολογίζουμε την βαρ. δυναμική ενέργεια σε σχέση με το επίπεδο που μας ενδιαφέρει...

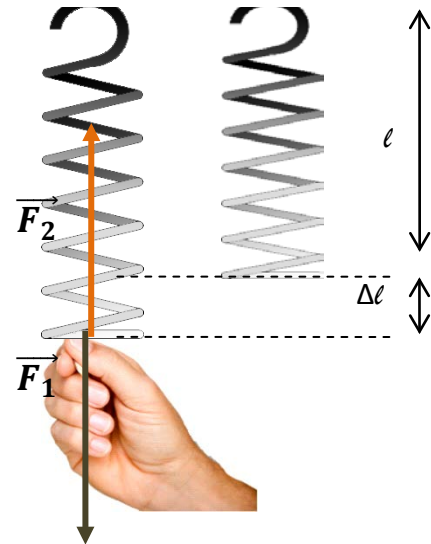
### 7. Η ελαστική δυναμική ενέργεια:

Ένα ελατήριο είναι αρχικά στο φυσικό του μήκος,  $\ell$ . Στην κατάσταση αυτή δεν ασκεί καμία δύναμη στο χέρι μου (αλλά και εγώ δεν χρειάζεται να του ασκήσω καμία δύναμη για να το κρατήσω σε αυτήν την κατάσταση). Έτσι, η δυναμική του ενέργεια είναι μηδέν.

Αν το τεντώσω κατά μήκος  $\Delta\ell$ , ανάμεσα στο άκρο του και το χέρι μου υπάρχει αλληλεπίδραση και αποθηκεύεται «ελαστική δυναμική ενέργεια»:

$$U_{ελ} = \frac{1}{2} k \cdot (\Delta\ell)^2$$

(όπου  $k$  η σταθερά του ελατηρίου).



#### ✓ Παράδειγμα

Το ελατήριο έχει σταθερά  $k = 40 \text{ N/m}$ . Τεντώνοντας το κατά  $\Delta\ell = 5 \text{ cm}$ , αποθηκεύεται ελαστική δυναμική ενέργεια:

$$U_{ελ} = \frac{1}{2} k \cdot \Delta\ell^2 = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 0,0025 \text{ J} = 0,05 \text{ J}.$$

Αν ήταν τεντωμένο κατά την διπλάσια παραμόρφωση,  $\Delta\ell = 10 \text{ cm}$ , η ενέργεια που θα αποθήκευε, θα ήταν τετραπλάσια!

$$U_{ελ} = \frac{1}{2} k \cdot \Delta\ell^2 = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 0,1^2 \text{ J} = 0,2 \text{ J}$$

## 8. Πως συνδέεται η «δύναμη» με την «ενέργεια»;

- ✓ Η δύναμη ασκείται στο αντικείμενο και το επιταχύνει. Έτσι αυτό αποκτάει *κινητική ενέργεια*.
- ✓ Η δύναμη του βάρους έλκει το βιβλίο και το ρίχνει, στο πάτωμα. Λέμε ότι το βιβλίο είχε *βαρυτική δυναμική ενέργεια*.
- ✓ Η δύναμη από το χέρι μας τέντωσε το ελατήριο, και αποθηκεύτηκε *ελαστική δυναμική ενέργεια*.

Σε κάθε περίπτωση, η δύναμη κάνει κάποια «δουλειά»: Σπρώχνει, τραβάει, παραμορφώνει, βοηθάει μία κίνηση ή την εμποδίζει. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα τα σώματα να αποκτούν ενέργεια, ή αν είχαν ήδη, η ενέργεια τους να αλλάζει.

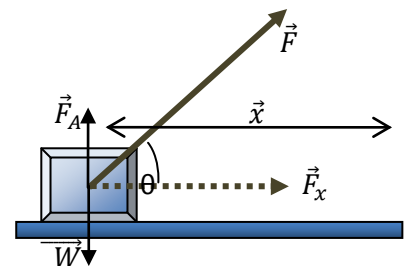
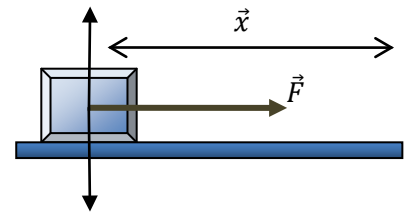
## 9. Το «έργο» της δύναμης...

Κάθε δύναμη  $\vec{F}$  έχει ένα σημείο εφαρμογής. Όταν το σημείο αυτό μετακινείται κατά απόσταση  $\vec{x}$ , και η δύναμη είναι σταθερή, ορίζουμε ως «έργο» της,  $W$  (work):

$$W = F_x \cdot x$$

όπου  $F_x$  είναι η συνιστώσα της δύναμης στην διεύθυνση της μετακίνησης.

Μια δύναμη που ασκείται σε διεύθυνση κάθετη στην μετατόπιση, έχει έργο μηδέν. Π.χ., στο διπλανό σχήμα, οι δυνάμεις του βάρους και της κάθετης αντίδρασης δεν έχουν έργο.



Το «έργο», εκφράζει την ενέργεια που αφαιρείται ή προσφέρεται σε ένα σώμα, λόγω της επίδρασης μιας δύναμης.

Είναι μονόμετρο μέγεθος και έχει ως μονάδα μέτρησης στο S.I., το Joule.

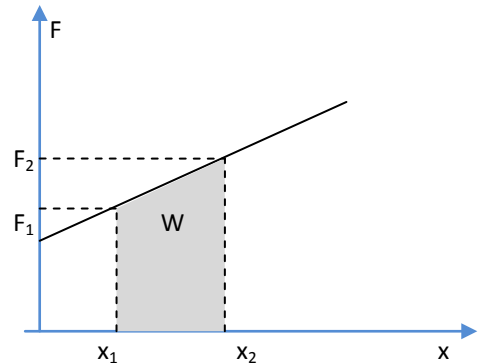
Όταν η δύναμη «βοηθάει» την κίνηση, το έργο της χαρακτηρίζεται ως «παραγόμενο», και το θεωρούμε θετικό. Αντίθετα, όταν η δύναμη εμποδίζει την κίνηση, το έργο της θεωρείται αρνητικό και χαρακτηρίζεται ως «καταναλισκόμενο».

Π.χ., Το έργο του ανθρώπου που σπρώχνει ένα τραπέζι είναι παραγόμενο (θετικό), ενώ της τριβής ανάμεσα στο τραπέζι και το πάτωμα, είναι καταναλισκόμενο (αρνητικό).

➤ Παρατηρήσεις

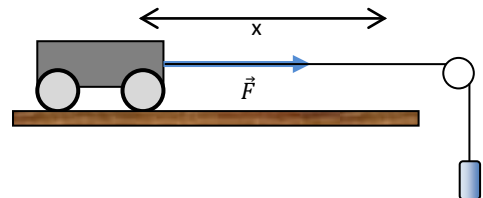
- ❖ Η απόσταση που χρησιμοποιούμε για να υπολογίσουμε το έργο είναι το διάστημα στο οποίο μετακινείται το σημείο εφαρμογής της δύναμης.
- ❖ Αν η δύναμη δεν είναι σταθερή, μπορούμε να υπολογίσουμε το έργο της με την βοήθεια του διαγράμματος Δύναμης – Απόστασης.

Σε ένα τέτοιο διάγραμμα, το εμβαδόν που ορίζεται από την γραφική παράσταση της δύναμης και τον άξονα της απόστασης, ισούται με το έργο.

✓ **Παραδείγματα**

1. Το αμαξάκι το εργαστηρίου είναι δεμένο με οριζόντιο νήμα από το οποίο δέχεται δύναμη  $F=0,5\text{N}$ . Μετακινείται σε απόσταση  $x = 0,6\text{m}$ . Το έργο της δύναμης του νήματος είναι:

$$W = F \cdot x = 0,5 \cdot 0,6 \text{ J} = 0,3 \text{ J}.$$

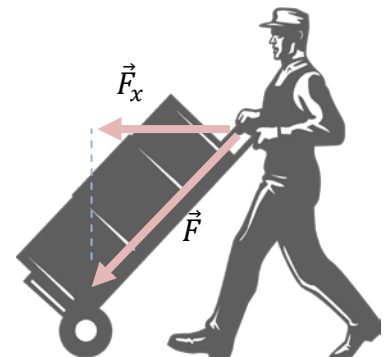


2. Ο εργάτης ασκεί στο κιβώτιο δύναμη μέτρου  $F = 100\text{N}$  σε διεύθυνση  $60^\circ$ , όπως στο σχήμα. Έτσι το μετακινεί σε απόσταση  $s = 10\text{m}$ . Το έργο της δύναμης του είναι :

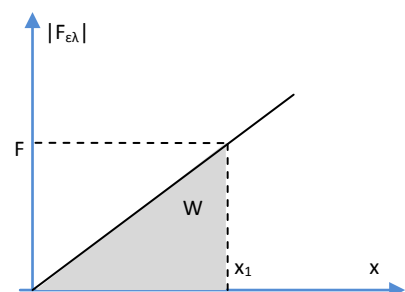
$$W = F_x \cdot s = F \cdot \sin 60^\circ \cdot s = 100 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \text{ J} = 500 \text{ J}.$$

Αν ασκούσε δύναμη του ίδιου μέτρου σε οριζόντια διεύθυνση για την ίδια απόσταση, το έργο θα ήταν:

$$W = F \cdot s = F \cdot s = 100 \cdot 10 \text{ J} = 1000 \text{ J}$$



3. Η δύναμη που ασκεί ένα ελατήριο στο χέρι μας μεταβάλλεται, ανάλογα με το πόσο παραμορφωμένο είναι το ελατήριο. Η σταθερά του ελατηρίου είναι  $k = 20\text{N/m}$  και η αρχική παραμόρφωση  $x_1 = 0,1\text{m}$ . Το μέτρο της δύναμης που ασκεί είναι:  $|F_{ελ}| = k \cdot |x|$  δηλ. είναι μεταβλητή δύναμη. Για να υπολογίσουμε το έργο όταν το ελατήριο επιστρέφει στο φυσικό του μήκος, φτιάχνουμε την γραφική παράσταση  $F - x$ :



$$W_{F_{ελ}} = \text{Εμβαδόν} = \frac{1}{2} k \cdot x_1 \cdot x_1 = \frac{1}{2} k \cdot x_1^2 = 0,1 \text{ J}$$

**10. Η κινητική ενέργεια αλλάζει μέσω του έργου των δυνάμεων.**

«Σε ένα σώμα μάζας  $m$  ασκείται οριζόντια δύναμη  $F$  (συνολική). Αρχικά το σώμα ήταν ακίνητο και μετακινείται σε απόσταση  $x$ . Πως συνδέεται το έργο της δύναμης με την κινητική ενέργεια που αποκτάει το σώμα;».

Από την εξίσωση της ταχύτητας για την ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, έχουμε:

$$v = a \cdot \Delta t \quad (1)$$

Η απόσταση που διανύεται είναι σύμφωνα με την εξίσωση της κίνησης:

$$x = \frac{1}{2} a \cdot \Delta t^2 \quad (2)$$

Σύμφωνα με την θεμελιώδη νόμο της μηχανικής,  $F = m \cdot a$  (3)

Το έργο της δύναμης, αντικαθιστώντας τα  $F$ ,  $x$  από τις (2) & (3):

$$W = F \cdot x = (m \cdot a) \cdot \left(\frac{1}{2} a \cdot \Delta t^2\right)$$

Κάνουμε τις πράξεις:

$$W = m \cdot \frac{1}{2} a^2 \cdot \Delta t^2 \quad \text{ή} \quad W = m \cdot \frac{1}{2} (a \cdot \Delta t)^2$$

Όμως η ποσότητα  $(a \cdot \Delta t)$  είναι η ταχύτητα του σώματος (σχέση (1)) και έτσι, όλος ο δεξιός όρος δεν είναι άλλο από την κινητική του ενέργεια!



$$W = m \cdot \frac{1}{2} (v)^2 \quad \text{ή} \quad W = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

Δηλ. το έργο της συνισταμένης δύναμης που ασκήθηκε στο σώμα, είναι ίσο με την κινητική ενέργεια που αποθηκεύτηκε σ' αυτό.

Το έργο της συνισταμένης των δυνάμεων που ασκείται σε ένα σώμα, μεταβάλλει την κινητική του ενέργεια κατά το ίδιο ποσό:

$$W_{\Sigma F} = \Delta K = K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}}$$

Η προηγούμενη πρόταση ονομάζεται και **Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας...**

➤ Παρατηρήσεις.

- ❖ Την προηγούμενη πρόταση μπορούμε να την διατυπώσουμε και ως εξής:

Η κινητική ενέργεια που αποκτάει ένα σώμα, είναι ίση με αυτήν που είχε αρχικά, συν το έργο των δυνάμεων που του ασκήθηκαν.

$$K_{\text{τελ}} = K_{\text{αρχ}} + W_{\Sigma F}$$

- ❖ Γνωρίζουμε ότι, όταν ένα σώμα ισορροπεί αρχικά η κινείται με σταθερή ταχύτητα, δέχεται συνισταμένη δύναμη μηδέν. Έτσι, ό,τι επιπλέον δύναμη του ασκηθεί αλλάζοντας την κινητική του κατάσταση, θα είναι και η αιτία που θα μεταβάλλει την κινητική του ενέργεια (παράγοντας η καταναλώνοντας έργο).
- ❖ Μέσω του έργου των δυνάμεων που δέχεται ή ασκεί ένα σώμα, ανταλλάσει ενέργεια με το περιβάλλον του.

✓ Παραδείγματα.

- Ένα κιβώτιο, βρίσκεται ακίνητο πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Του ασκούμε μία οριζόντια δύναμη μέτρου  $F = 10\text{N}$ , ενώ η τριβή ολίσθησης είναι  $T = 2\text{N}$ . Την στιγμή που έχει μετακινηθεί κατά  $s = 2\text{m}$ , το έργο κάθε μίας από τις δύο δυνάμεις είναι:

$$W_F = F \cdot s = 20\text{J} \quad (\text{παραγόμενο έργο αφού η } F \text{ βοηθάει την κίνηση})$$

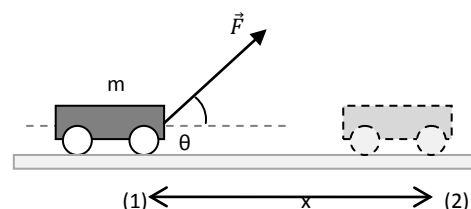
$$W_T = -T \cdot s = -4\text{J} \quad (\text{καταναλισκόμενο έργο αφού η } T \text{ εμποδίζει την κίνηση})$$

Το κιβώτιο αρχικά, δεν είχε κινητική ενέργεια. Τελικά θα αποκτήσει:

$$K_{\text{τελ}} = W_{\Sigma F} = (20 - 4)\text{J} = 16\text{J}.$$

Το βάρος και η κάθετη αντίδραση έχουν συνισταμένη μηδέν και δεν μεταβάλλουν την ενέργεια του (ή αλλιώς, είναι κάθετα στην μετατόπιση και το έργο τους είναι μηδέν).

- Το αμαξάκι του σχήματος, δέχεται την δύναμη  $\vec{F}$ , σε διεύθυνση  $\theta = 45^\circ$ . Η δύναμη έχει μέτρο  $F = 10\sqrt{2}\text{ N}$  και η μάζα του σώματος είναι  $m = 1\text{kg}$ . Οι τριβές είναι αμελητέες. Υπολογίζουμε την ταχύτητα του όταν αυτό έχει μετακινηθεί κατά  $s = 0,8\text{m}$ :



Θ.Μ.Κ.Ε. ανάμεσα στην αρχική (1) και την τελική (2) θέση.



$$K_{(2)} - K_{(1)} = W_F^{(1 \rightarrow 2)}$$

$$\frac{1}{2} m \cdot v^2 - 0 = F \cdot s \cdot \sin 45^\circ$$

Λύνουμε ως προς  $v$ :

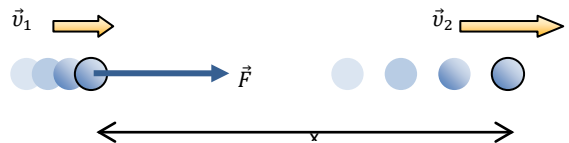
$$v^2 = 2 \cdot \frac{F \cdot s \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{m}$$

$$v = \sqrt{2 \cdot \frac{F \cdot s \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{m}} = 4 \text{ m/s}$$

Το ίδιο θα μπορούσαμε να το υπολογίσουμε και από τις εξισώσεις κίνησης, αλλά αφού πρώτα βρήκαμε τον χρόνο κίνησης και την επιτάχυνση...

Το βάρος και η κάθετη αντίδραση δεν καταναλώνουν, ούτε παράγουν έργο, καθώς είναι κάθετα στην διεύθυνση της κίνησης.

5. «Ασκούμε δύναμη  $\vec{F}$  σταθερού μέτρου  $5\text{N}$ , σε ένα αντικείμενο μάζας  $m = 1,5\text{ kg}$ , το οποίο αρχικά κινούταν με σταθερή ταχύτητα  $v_1 = 2\text{ m/s}$ . Την δύναμη την ασκούμε μέχρι το αντικείμενο να διανύσει απόσταση  $x = 4\text{ m}$ , και μετά το αφήνουμε ελεύθερο».



Αφού αρχικά το αντικείμενο κινούταν με σταθερή ταχύτητα, δεν δεχόταν καμία δύναμη (ή η συνισταμένη τους ήταν μηδέν). Άρα η μοναδική δύναμη που δέχεται είναι  $\vec{F}$ .

Η κινητική του ενέργεια θα αυξηθεί (άρα και η ταχύτητα). Και αυτό γιατί η δύναμη παρήγαγε έργο και του πρόσφερε ενέργεια.

Το αντικείμενο θα αποκτήσει ταχύτητα  $v_2$  που μπορούμε να την υπολογίσουμε:

Θ.Μ.Κ.Ε (από θέση (1)  $\rightarrow$  θέση (2)):

$$\frac{1}{2} m \cdot v_2^2 = \frac{1}{2} m \cdot v_1^2 + W_F = \frac{1}{2} m \cdot v_1^2 + F \cdot x$$

Λύνουμε ως προς την ταχύτητα  $v_2$ :

$$v_2 = \sqrt{\frac{m \cdot v_1^2 + 2 \cdot F \cdot x}{m}} \approx \frac{5,54 \text{ m}}{\text{s}}$$

### 11. Το έργο του βάρους μεταβάλλει την βαρυτική δυναμική ενέργεια ενός σώματος.

«Το βιβλίο που έχει βάρος  $w = 5N$ , βρίσκεται σε ύψος  $h_1 = 80cm$  πάνω από το πάτωμα. Το αφήνω και πέφτει χαμηλότερα, σε ύψος  $h_2 = 20cm$ ».

- ✓ Το βάρος του βιβλίου παράγει έργο κατά την μετακίνηση  $y = h_1 - h_2$ :  
 $W_\beta = w \cdot y = 3J$ .
- ✓ Η βαρυτική δυναμική ενέργεια του ήταν  $U_{\beta 1} = w \cdot h_1 = 4J$   
 και έγινε  $U_{\beta 2} = w \cdot h_2 = 1J$ .
- ✓ Άρα ελαττώθηκε κατά ποσό ίσο με το έργο του βάρους...

Όταν το βάρος παράγει έργο, ελαττώνεται η βαρυτική δυναμική ενέργεια (και αντίθετα, όταν το έργο του βάρους είναι καταναλισκόμενο, αυξάνεται η βαρυτική δυναμική ενέργεια του σώματος)...

Αν την προηγούμενη πρόταση την διατυπώσουμε ποιο μαθηματικά:

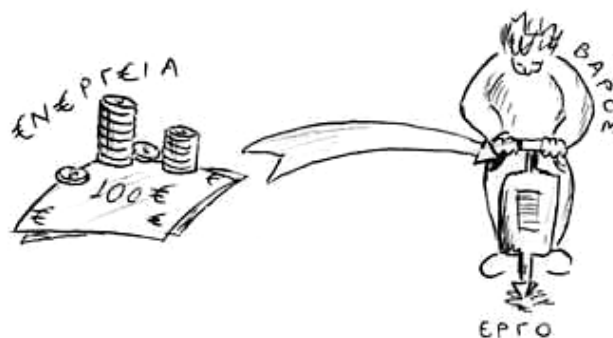
Όταν το έργο του βάρους είναι θετικό, η μεταβολή της βαρυτική δυναμικής ενέργειας είναι αρνητική (και αντίστροφα)...

$$W_\beta = - \Delta U_\beta$$

ή

$$W_\beta = U_{\beta \text{ αρχική}} - U_{\beta \text{ τελική}}$$

Η παραγωγή έργου από το βάρος, έχει το κόστος της: Δαπάνη βαρυτικής δυναμικής ενέργειας!



## ✓ Παραδείγματα.

1. Μία πέτρα μάζας  $m = 100\text{g} (=0,1\text{kg})$  βρίσκεται σε μια ταρατσα ύψους  $h_1 = 8\text{m}$ . Την αφήνουμε ελεύθερη να πέσει στο έδαφος.

Η αρχική βαρυτική δυναμική ενέργεια που έχει:

$$U_{\beta(1)} = m \cdot g \cdot h_1 = 0,1 \cdot 10 \cdot 8 \text{ J} = 8 \text{ J}.$$

Όταν έχει πέσει σε ύψος  $h_2 = 3\text{m}$ :

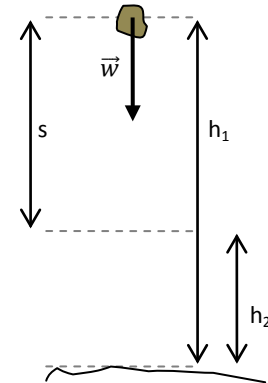
$$U_{\beta(2)} = m \cdot g \cdot h_2 = 0,1 \cdot 10 \cdot 3 \text{ J} = 3 \text{ J}.$$

Το έργο του βάρους μπορεί να υπολογιστεί και από την ελάττωση της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας:

$$W_{\beta} = U_{\beta(1)} - U_{\beta(2)} = 5 \text{ J}$$

Προσέχουμε ότι αφαιρέσαμε την αρχική μείον την τελική τιμή της δυναμικής ενέργειας...

Επίσης, το έργο του βάρους θα μπορούσαμε να το υπολογίσουμε και από την γνωστή σχέση υπολογισμού του έργου σταθερής δύναμης,  $W_{\beta} = w \cdot s$ .



2. Στο προηγούμενο παράδειγμα, ας υπολογίσουμε την κινητική ενέργεια που έχει το σώμα στην θέση (2):

Θ.Μ.Κ.Ε (από θέση (1) → θέση (2)):

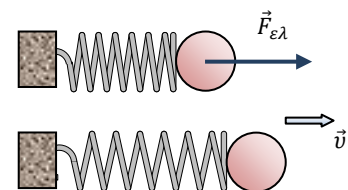
$$K_2 - K_1 = W_{\beta}^{(1 \rightarrow 2)}$$

$$K_2 = 5 \text{ J} = U_{\beta(1)} - U_{\beta(2)}.$$

Η βαρυτική δυναμική ενέργεια δεν χάθηκε. Μετατράπηκε σε κινητική, μέσω του έργου του βάρους.

## 12. Το έργο της δύναμης του ελατηρίου μεταβάλλει την ελαστική δυναμική ενέργεια.

«Το ελατήριο είναι συμπιεσμένο και στο άκρο του έχουμε ακουμπήσει μία μικρή σφαίρα. Αφήνουμε το ελατήριο ελεύθερο. Η δύναμη που ασκεί στην σφαίρα μεταβάλλεται συνεχώς μέχρι που μηδενίζεται, όταν το ελατήριο φτάσει στο φυσικό του μήκος».



Η Ελαστική Δυναμική Ενέργεια, ελαττώνεται.

Η ελάττωση της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου, είναι ίση με το έργο που παράγει η δύναμη που ασκεί.

$$W_{Fελ} = - \Delta U_{ελ}$$

ή

$$W_{Fελ} = U_{ελ αρχική} - U_{ελ τελική}$$

Δηλ., η παραγωγή έργου από την δύναμη του ελατηρίου, γίνεται εις βάρος της δυναμικής του ενέργειας. Ταυτόχρονα, αυξάνεται η κινητική ενέργεια της σφαίρας.

Μπορούμε να πούμε:

Η ελαστική δυναμική ενέργεια μετατράπηκε σε κινητική ενέργεια της σφαίρας, μέσω του έργου της δύναμης του ελατηρίου.

✓ **Παράδειγμα.**

Το ελατήριο σταθεράς  $k = 40 \text{ N/m}$  είναι συσπειρωμένο κατά  $\Delta \ell_1 = 4 \text{ cm}$ . Το αφήνουμε να αποσυμπιεστεί μέχρι το φυσικό του μήκος ( $\Delta \ell_2 = 0$ ), σπρώχνοντας τη σφαίρα. Το έργο της δύναμης που ασκεί το ελατήριο είναι:

$$W_{Fελ} = - \Delta U_{ελ}$$

$$W_{Fελ} = \frac{1}{2} k \cdot \Delta \ell_1^2 - \frac{1}{2} k \cdot \Delta \ell_2^2$$

$$W_{Fελ} = \frac{1}{2} k \cdot \Delta \ell_1^2 = 0,032 \text{ J}$$

Το έργο αυτό μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια της σφαίρας:

$$K_{σφαίρας} = W_{Fελ} = 0,032 \text{ J}$$

**13. Η κινητική ενέργεια μετατρέπεται σε δυναμική και αντίστροφα. Είναι και οι δύο ενέργειες του ίδιου «είδους»**

Η ενέργεια που σχετίζεται με το έργο δυνάμεων όπως το βάρος, η δύναμη του ελατηρίου, οι ηλεκτρικές δυνάμεις κ.λ.π., λέγεται **μηχανική ενέργεια**.

Έτσι, η μηχανική ενέργεια ενός σώματος ισούται με το άθροισμα της κινητικής και δυναμικής του ενέργειας:

$$K + U = E_{μηχ}$$

Όταν σε ένα σώμα δεν ασκούνται άλλες δυνάμεις εκτός από αυτές που μετατρέπουν το ένα συστατικό της μηχανικής ενέργειας στο άλλο, (π.χ. κινητική  $\rightarrow$  δυναμική), η μηχανική ενέργεια δεν αλλάζει.

- ✓ Είναι σαν να έχουμε μία ποσότητα νερού μοιρασμένη σε δύο ποτήρια. Μεταφέροντας νερό από το ένα στο άλλο, αλλάζει το περιεχόμενο του κάθε ποτηριού, αλλά δεν αλλάζει η συνολική ποσότητα...



Έτσι, οι δυνάμεις που προαναφέραμε (βάρος, δύναμη ελατηρίου, ηλεκτρικές...) δεν μπορούν να μεταβάλλουν την μηχανική ενέργεια και ονομάζονται «**συντηρητικές δυνάμεις**»



Αντίθετα δυνάμεις όπως η τριβή, η αντίσταση του αέρα, μετατρέπουν κινητική ενέργεια ενός σώματος σε θερμότητα, η οποία δεν είναι κομμάτι της μηχανικής ενέργειας.

Λέμε ότι η τριβή είναι **μη συντηρητική δύναμη**.

#### 14. Πόσο γρήγορα παράγεται η καταναλώνεται το έργο; Η Ισχύς της δύναμης...

Η μετατροπή της ενέργειας από την μία μορφή στην άλλη γίνεται μέσω του έργου των δυνάμεων. Η μετατροπή αυτή μπορεί να διαρκέσει περισσότερο ή λιγότερο...

- ✓ Ένα αυτοκίνητο ξεκινάει από την ηρεμία με σκοπό να αποκτήσει ταχύτητα 100km/h. Ανάλογα με την «ισχύ» του κινητήρα του θα το πετύχει σε 10s, 12s, 15s κ.λ.π. Η τελική ενέργεια σε κάθε περίπτωση είναι η ίδια. Ο ρυθμός όμως με τον οποίο την απέκτησε το αυτοκίνητο είναι διαφορετικός...

Ο ρυθμός με τον οποίο μία δύναμη παράγει (η καταναλώνει) έργο ονομάζεται **Ισχύς (P)** της δύναμης:

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

Όμως το έργο της δύναμης είναι:

$$\Delta W = F_x \Delta x$$

Έτσι, αντικαθιστώντας στην προηγούμενη, έχουμε:

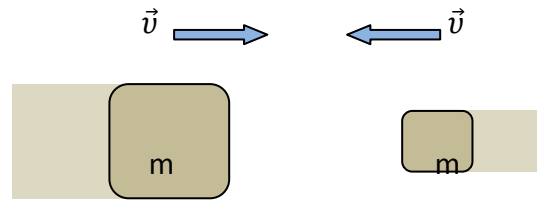
$$P = \frac{F_x \cdot \Delta x}{\Delta t} \Rightarrow P = F_x \cdot v$$

Η ισχύς είναι μονόμετρο μέγεθος με μονάδα μέτρησης στο διεθνές σύστημα το Watt (=Joule/s).

**Ερωτήσεις – Ασκήσεις**

Στις παρακάτω ασκήσεις όπου χρειάζεται, θεωρείστε δεδομένο ότι  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

1. Τα δύο κομμάτια πλαστελίνη του σχήματος έχουν ίσες μάζες  $m$ , και κινούνται με ταχύτητες ίσου μέτρου  $u$ . Με ποια από τις επόμενες προτάσεις συμφωνείτε;



- A.** Θα έχουν και τα δύο την ίδια κινητική ενέργεια.
- B.** Θα έχουν και τα δύο την ίδια ορμή και την ίδια κινητική ενέργεια.
- Γ.** Θα έχουν αντίθετες ορμές και αντίθετες κινητικές ενέργειες.
- Δ.** Το αριστερό έχει μεγαλύτερη κινητική ενέργεια από το δεξιό.
2. Στο σχήμα της προηγούμενης ερώτησης ισχύει ότι:
- A.** Η ορμή του συστήματος είναι μηδέν
- B.** Η κινητική ενέργεια του συστήματος πριν την κρούση είναι μηδέν.
- Γ.** Τα δύο σώματα συγκρούονται πλαστικά. Μετά την σύγκρουση, το συσσωμάτωμα θα κινηθεί προς τα δεξιά
- Δ.** Μετά την σύγκρουση, η κινητική τους ενέργεια δεν θα αλλάξει.
3. Ένα ελατήριο είναι συσπειρωμένο κατά  $\Delta l$ . Αν το είχαμε συμπιέσει ώστε να έχει διπλάσια παραμόρφωση, η αποθηκευμένη ενέργεια θα ήταν:
- A.** Διπλάσια **B.** Μισή **Γ.** Η ίδια **Δ.** Τετραπλάσια.
4. Με ποια-ες από τις επόμενες προτάσεις συμφωνείτε;
- A.** Η τριβή ολίσθησης που ασκείται σε ένα σώμα, μετατρέπει την κινητική του ενέργεια σε δυναμική.
- B.** Όταν σε ένα σώμα ασκείται τριβή, η μηχανική του ενέργεια δεν διατηρείται.
- Γ.** Το βάρος είναι μία δύναμη που δεν μεταβάλλει την μηχανική ενέργεια ενός σώματος.

**Δ.** Όταν σε ένα σώμα ασκούνται συντηρητικές δυνάμεις, διατηρείται η κινητική του ενέργεια.

5. Ένα αντικείμενο μάζας  $m = 2\text{kg}$ , κινείται με σταθερή ταχύτητα μέτρου  $v = 5\text{m/s}$ .

**Α.** Πόση είναι η κινητική του ενέργεια;

**Β.** Ποιο είναι το μέτρο της ορμής του;

**Γ.** Κάποια στιγμή δέχεται μία δύναμη με αποτέλεσμα η ταχύτητα του να διπλασιαστεί. Πόση θα είναι η καινούρια τιμή της κινητικής του ενέργειας και ποια της ορμής του;

**Δ.** Ποιο από τα δύο μεγέθη μεταβάλλεται περισσότερο;

6. Μία πέτρα μάζας  $m = 200\text{g}$  βρίσκεται αρχικά ακίνητη σε ύψος  $10\text{ m}$  πάνω από το έδαφος. Την αφήνουμε ελεύθερη να πέσει. Όταν βρίσκεται σε απόσταση  $h = 5\text{m}$  από το έδαφος, η ταχύτητα της έχει μέτρο  $v = 10\text{m/s}$ .

**Α.** Πόση βαρυτική δυναμική ενέργεια και πόση κινητική έχει στην αρχική της θέση;

**Β.** Υπολογίστε τις τιμές των δύο ενεργειών, όταν η πέτρα βρίσκεται σε ύψος  $5\text{m}$  από το έδαφος.

**Γ.** Συγκρίνετε την συνολική ενέργεια που έχει στις δύο θέσεις.

**Δ.** Πόση βαρυτική δυναμική ενέργεια θα έχει στο έδαφος (ακριβώς πριν συγκρουστεί); Πόση θα είναι τότε η κινητική του;

 Ως επίπεδο αναφοράς να θεωρήσετε το έδαφος.

7. Ένας αθλητής εκτελεί ελεύθερη πτώση από ύψος  $180\text{m}$ . Αν η μάζα του είναι  $m = 80\text{kg}$ , υπολογίστε:

**Α.** Την αρχική του δυναμική ενέργεια.

**Β.** Το μέτρο της ταχύτητας του, όταν θα έχει πέσει κατά  $20\text{m}$ .

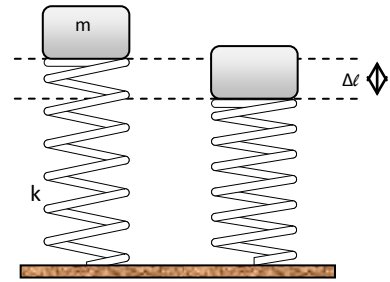
**Γ.** Την τιμή της ταχύτητας με την οποία θα έφτανε στο έδαφος, αν δεν υπήρχε το σχοινί που τον σταματάει.

**Δ.** Στην (ατυχή) περίπτωση απουσίας του σχοινιού, πόση (μέση) δύναμη θα δεχόταν από το έδαφος όταν θα χτυπούσε σε αυτό; Θεωρείστε την χρονική διάρκεια της ...πρόσκρουσης,  $\Delta t = 0,5\text{s}$ .





8. Στο ελεύθερο άκρο του κατακόρυφου ελατηρίου του σχήματος, τοποθετούμε ένα βαρίδι μάζας  $m = 100\text{g}$ . Η σταθερά του ελατηρίου είναι  $k = 25\text{N/m}$ . Το ελατήριο συμπιέζεται κατά  $\Delta\ell$  το βαρίδι ισορροπεί.



**A.** Στην θέση όπου ισορροπεί το βαρίδι, να σχεδιάσετε και να υπολογίσετε τις δυνάμεις που δέχεται.

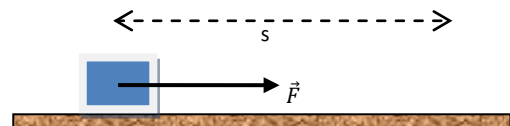
**B.** Πόση είναι η συσπείρωση του ελατηρίου;

**Γ.** Πόση είναι η ελαστική δυναμική ενέργεια που έχει αποθηκευτεί στο σύστημα ελατήριο – βαρίδι;

**Δ.** Θεωρώντας ως επίπεδο αναφοράς την θέση ισορροπίας του συστήματος, πόση ήταν η αρχική βαρυτική δυναμική ενέργεια που είχε το βαρίδι;

**\*Ε.** Υπήρξαν απώλειες μηχανικής ενέργειας μέχρι να ισορροπήσει το βαρίδι;

9. Στο κιβώτιο του σχήματος ασκείται μία οριζόντια δύναμη μέτρου  $F = 20\text{N}$ . Η μάζα του είναι  $m = 4\text{kg}$  και ο συντελεστής τριβής που εμφανίζει με το οριζόντιο επίπεδο είναι  $\mu = 0,2$ .



**A.** Σχεδιάστε τις όλες δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα και υπολογίστε το μέτρο της δύναμης της Τριβής.

**B.** Αν το κιβώτιο μετακινείται σε απόσταση  $s = 3\text{m}$ , υπολογίστε το έργο όλων των δυνάμεων που του ασκούνται.

**Γ.** Αν η δύναμη  $F$  ασκούταν σε διεύθυνση  $60^\circ$  ως προς το οριζόντιο επίπεδο, πόσο θα ήταν το έργο της για την ίδια μετατόπιση;

10. Ένα μικρό ξύλινο πλακίδιο εκτοξεύεται σε οριζόντια διεύθυνση πάνω σε ένα τραπέζι με ταχύτητα μέτρου  $v = 3\text{m/s}$ . Η μάζα του είναι  $m = 200\text{g}$  και ο συντελεστής τριβής ολίσθησης με το τραπέζι είναι  $\mu = 0,3$ .

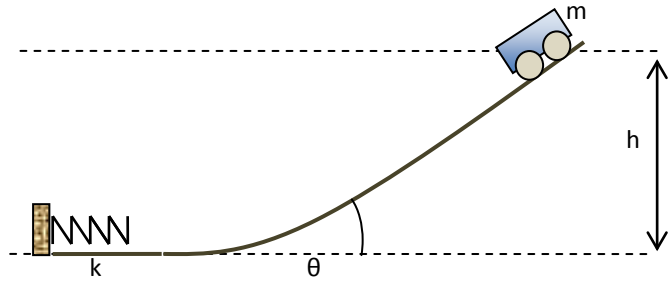
**A.** Πόση είναι η κινητική του ενέργεια στην αρχή της κίνησης και πόση όταν σταματάει;

**B.** Που οφείλεται η μεταβολή της κινητικής του ενέργειας; Υπολογίστε το έργο της τριβής.

**Γ.** i) Πόση είναι η τριβή που δέχεται;

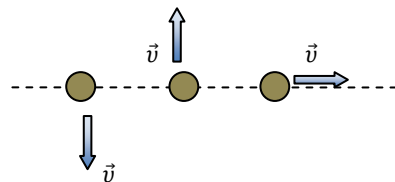
ii) Πόση είναι η απόσταση που διένυσε μέχρι να σταματήσει;

11. Στο κεκλιμένο επίπεδο του σχήματος αφήνουμε ένα εργαστηριακό αμαξάκι μάζας  $m = 0,6\text{kg}$  να κινηθεί προς την βάση του επιπέδου. Το ύψος στο οποίο βρισκόταν αρχικά το αμαξάκι ήταν  $h = 40\text{cm}$ .

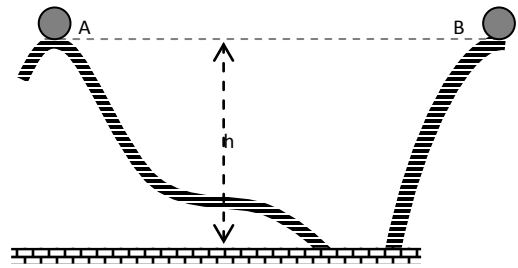


- A.** Πόση θα είναι η κινητική του ενέργεια όταν θα φτάσει στην βάση του επιπέδου;
- B.** Με πόση ταχύτητα θα κινείται εκεί;
- Γ.** Στην βάση του επιπέδου συναντάει ένα οριζόντιο ελατήριο σταθεράς  $k = 120\text{N/m}$  στο οποίο χτυπάει συμπιέζοντας το. Την στιγμή που σταματάει στιγμιαία, πόση ενέργεια θα έχει αποθηκευτεί στο ελατήριο;
- Δ.** Ποια θα είναι τότε η συσπίρωση του ελατηρίου;
12. Ένα μικρό αντικείμενο αφήνεται να εκτελέσει ελεύθερη πτώση από ύψος  $h = 20\text{m}$ . Να υπολογίσετε την ταχύτητα με την οποία φτάνει στο έδαφος
- A.** Εφαρμόζοντας τις εξισώσεις της ελεύθερης πτώσης
- B.** Εφαρμόζοντας το θεώρημα μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας
- Γ.** Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας.
- Δ.** Αν η αντίσταση του αέρα δεν θεωρούταν αμελητέα, ποιον – ποιους από τους προηγούμενους τρόπους δεν θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε;

13. Στο σχήμα φαίνονται τρία αντικείμενα τα οποία τα εκτοξεύουμε από το ίδιο ύψος, με ίδιο μέτρο ταχύτητας, σε διαφορετικές διευθύνσεις. Αν και τα τρία έχουν την ίδια μάζα και η αντίσταση του αέρα είναι αμελητέα, ποιο από τα τρία θα φτάσει στο έδαφος με ταχύτητα μεγαλύτερου μέτρου; Αιτιολογείστε την απάντησή σας.



14. Οι δύο όμοιες σφαίρες του διπλανού σχήματος βρίσκονται αρχικά ακίνητες, στο ίδιο ύψος πάνω από το έδαφος. Θεωρώντας σαν επίπεδο αναφοράς το έδαφος, χαρακτηρίστε κάθε μία από τις επόμενες προτάσεις ως σωστή ή λανθασμένη.

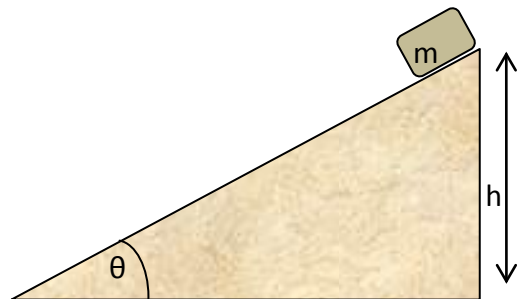


**A.** Η σφαίρα Β έχει μεγαλύτερη βαρυτική δυναμική ενέργεια από την Α.

**B.** Και οι δύο έχουν την ίδια βαρυτική δυναμική ενέργεια.

**Γ.** Αφήνοντας τις ελεύθερες να κινηθούν μέχρι να φτάσουν στο έδαφος, το έργο του βάρους είναι μεγαλύτερο για την σφαίρα Α.

15. Στο κεκλιμένο επίπεδο του διπλανού σχήματος, η γωνία κλίσης είναι  $30^\circ$ . Ο συντελεστής τριβής ανάμεσα στο σώμα και στην επιφάνεια του επιπέδου είναι  $\mu = \frac{\sqrt{3}}{10}$  και η μάζα του σώματος είναι  $m = 1,2\text{kg}$ . Το ύψος στο οποίο βρίσκεται αρχικά το σώμα είναι  $h_1 = 40\text{cm}$ .



**A.** Πόση είναι η βαρυτική δυναμική ενέργεια του σώματος;

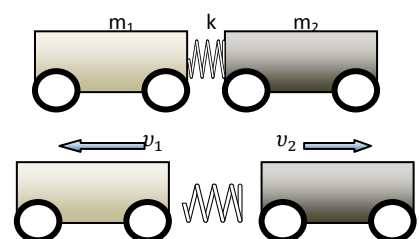
**B.** Να υπολογίσετε το έργο του βάρους και το έργο της τριβής κατά την μετακίνηση του σώματος μέχρι την βάση του επιπέδου (η απόσταση που διανύει μέχρι εκεί είναι  $80\text{cm}$ ).

**Γ.** Πόση είναι η ελάττωση της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας μέχρι το σώμα να φτάσει στην βάση του επιπέδου;

**Δ.** Πόση είναι τότε η κινητική του ενέργεια;

Για τα ερωτήματα Α, Γ, Δ, θεωρείστε ως επίπεδο αναφοράς i) την βάση του επιπέδου ii) την αρχική θέση του σώματος. Συγκρίνετε τα αποτελέσματα.

16. Δύο αμαξάκια με μάζες  $m_1 = 600\text{g}$  και  $m_2 = 1200\text{g}$ , ακουμπούν στα δύο άκρα ενός συσπειρωμένου ελατηρίου σταθεράς  $k = 60\text{N/m}$ . Η συσπίρωση του ελατηρίου είναι  $\Delta l = 6\text{cm}$ . Όλο το σύστημα ηρεμεί πάνω σε οριζόντιο επίπεδο.



**A.** Πόση ενέργεια είναι αποθηκευμένη στο σύστημα ελατήριο – μάζες;

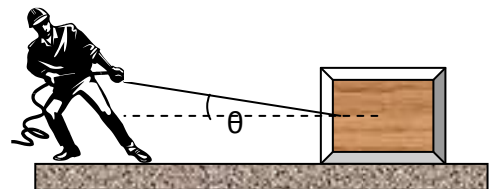
**B.** Πόση είναι η ορμή του συστήματος;

**Γ.** Ελευθερώνουμε το ελατήριο. Πόση κινητική ενέργεια και πόση ορμή θα έχει το σύστημα, όταν το ελατήριο αποσυμπιεστεί εντελώς;

**Δ.** Υπολογίστε τα μέτρα των ταχυτήτων που θα αποκτήσει τότε το κάθε αμαξάκι. Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας του όταν έχουν πλέον αποσπαστεί από το ελατήριο;

✚ Θεωρείστε τις τριβές αμελητέες.

17. Ένας εργάτης ασκεί με την βοήθεια ενός σχοινού, δύναμη μέτρου  $F = 200\text{N}$  στο κιβώτιο του σχήματος. Αρχικά το κιβώτιο ήταν ακίνητο. Ο συντελεστής τριβής ανάμεσα σε αυτό και το πάτωμα είναι  $\mu = 0,5$  η μάζα του κιβωτίου  $m = 20\text{kg}$ , και η γωνία που σχηματίζει το σχοινί με την οριζόντια διεύθυνση είναι  $\theta = 30^\circ$ . Το σχοινί σπάει όταν το κιβώτιο έχει διανύσει απόσταση  $s = 4\text{m}$ . Έτσι κινείται λίγο ακόμα και σταματάει λόγω της τριβής.



**A.** Σχεδιάστε όλες τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα, πριν και μετά το κόψιμο του σχοινού (2 σχήματα). Μετά, υπολογίστε το έργο κάθε μίας από αυτές, μέχρι την στιγμή που κόβεται το σχοινί.

**B.** Πόση είναι η ταχύτητα την στιγμή που κόβεται το σχοινί;

**Γ.** Με ποιο ρυθμό παράγει έργο ο εργάτης και με ποιο ρυθμό καταναλώνει η τριβή, την συγκεκριμένη χρονική στιγμή;

**Δ.** Πόση απόσταση διανύει το κιβώτιο μέχρι να σταματήσει, μετά το σπάσιμο του σχοινού; (Για τον υπολογισμό χρησιμοποιείτε το Θ.Μ.Κ.Ε. ή τις εξισώσεις κίνησης)

✚ Για τις πράξεις θεωρείστε ότι  $\sqrt{3} \approx 1,725$

18. Ένα αμαξάκι μάζας  $m = 1200\text{g}$  κινείται σε οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα μέτρου  $u_1 = 4\text{m/s}$ . Κάποια στιγμή συγκρούεται πλαστικά με ένα αρχικά ακίνητο κομμάτι ξύλου, ίσης μάζας, το οποίο εμφανίζει συντελεστή τριβής ολίσθησης  $\mu = 0,3$  με το οριζόντιο επίπεδο. Το συσσωμάτωμα που δημιουργείται κινείται για απόσταση  $d$  και τελικά σταματάει.

- A.** Πόση είναι η ορμή και πόση η κινητική ενέργεια του συστήματος πριν την σύγκρουση;
- B.** Με την βοήθεια της Α.Δ.Ο., υπολογίστε την ταχύτητα που έχει το συσσωμάτωμα αμέσως μετά την σύγκρουση.
- Γ.** Πόση θα είναι η κινητική ενέργεια που θα έχει το συσσωμάτωμα, αμέσως μετά την κρούση; Μπορούμε να πούμε ότι η κινητική ενέργεια διατηρήθηκε;
- Δ.** Υπολογίστε την απόσταση που χρειάστηκε το συσσωμάτωμα για να σταματήσει.
- Ε.** Πόση είναι η μηχανική ενέργεια που παρέμεινε τελικά στο σύστημα των δύο σωμάτων; Πόση είναι η μηχανική συνολική ενέργεια που έφυγε στο περιβάλλον με μορφή θερμότητας;

19. Στο διπλανό σχήμα, το κεκλιμένο επίπεδο είναι λείο και φτιαγμένο με τέτοιο τρόπο ώστε να μπορούμε να μεταβάλουμε το ύψος του  $h$ . Το



οριζόντιο επίπεδο εμφανίζει τριβή. Αφήνουμε ένα πλακίδιο να γλιστρήσει στο κεκλιμένο επίπεδο και τελικά να σταματήσει σε απόσταση  $d$  από την βάση του επιπέδου, λόγω τριβής. Αν αφήσουμε το ίδιο πλακίδιο από διπλάσιο ύψος, η απόσταση  $d'$  που θα χρειαστεί για να σταματήσει θα είναι:

- A.** Ίδια      **B.** Η μισή      **Γ.** Η διπλάσια

Επιλέξτε την σωστή απάντηση και αιτιολογίστε την επιλογή σας.

20. Σε ένα σώμα μάζας  $m = 3,3\text{kg}$  που αρχικά ηρεμεί, ασκούμε μία οριζόντια δύναμη μεταβλητού μέτρου που μεταβάλλεται σύμφωνα με την εξίσωση.  $F = 5 + 2 \cdot x$  (S.I.), όπου  $x$  είναι η μετατόπιση του σώματος.

- A.** Ποια είναι η τιμή της δύναμης όταν η μετατόπιση είναι  $x_1 = 2\text{m}$  και ποια όταν το σώμα έχει μετακινηθεί κατά  $x_2 = 6\text{m}$ ;
- B.** Φτιάξτε σε ένα σύστημα αξόνων την γραφική παράσταση της δύναμης  $F$  σε σχέση με την μετατόπιση  $x$ .
- Γ.** Με την βοήθεια της γραφικής παράστασης που φτιάξατε, υπολογίστε το έργο της δύναμης, όταν το σώμα έχει μετατοπιστεί κατά  $6\text{m}$ .
- Δ.** Γνωρίζοντας ότι κατά την διάρκεια της κίνησης του σώματος δεν του ασκείται καμία άλλη δύναμη, υπολογίστε την ταχύτητά του την στιγμή που έχει μετακινηθεί κατά  $6\text{m}$ .

**«Στοιχεία Φυσικής Α' & Β' Λυκείου»**

**ISBN: 978-618-00-3316-8**